

# 9 內積

§1. 內積與正投影 .....	9-2
§2. Gram-Schmidt程序與QR分解 .....	9-34
§3. 近似解與正投影公式 .....	9-44

## 概要與指引

向量的主要運算有三種：向量加法，係數積，及內積。加法和係數積建構空間的基本性質，而內積使我們可以討論正交，長度，投影等幾何性質。由於內積的引入，向量的研討才變得豐富而生動。

在討論過前兩種運算之後，在此處介紹第三種運算是極合適的時機。有些教科書(如 Hoffman)把內積放在Jordan form後面，這使得空間分解不完整(還不能討論正交分解)；也使得對角化只能先講一半(無法開始討論單式對角化)。像這樣，反而使完整的題材變得破碎而不利於學習。更糟的是：許多讀者的精力已被Jordan form 耗盡，這簡單而重要的內積反而變成無力研讀。我們若留意到近年來較受歡迎的書大多提前介紹內積，就可以確知該用什麼研習順序才能得到最佳效率了。

內積在實空間具備雙線性，交換性，以及正定性。但到了複空間卻無法同時擁有這些性質。爲了保持重要的正定性，數學家將雙線性調整爲1.5線性，而將交換性降爲共軛交換性(定義2)。內積在各本書的定義並不一致，本書特別詳細分辨比較，使讀者能適應不同的場合。本章的重點是正投影，由正投影產生Gram-Schmidt正交化程序，並處理近似解的問題。請各位讀者多留意定理12，定理16，定理21a。