2 矩陣

概要與指引

矩陣是貫串線性代數的工具, 有的作者(Strang)甚至完全不提線性映射, 試圖用矩陣來講解整個線性代數. 本章討論矩陣的基本性質, 這些性質是整本書的基礎.

第一節討論矩陣的加法, 係數積, 及乘法. 其中矩陣乘法的性質和以前的經驗大不相同; 而且矩陣還區分爲可逆和不可逆兩類. 第二節是利用第一節的性質, 做一些演算上的應用. 第三節介紹關於轉置的一些題材, 並討論矩陣的跡.

本章的題材中, 最重要的是矩陣相乘的切割法(定理6, 7), 尤其右直切分解法與左直切展開法更是經常用到的基本技巧. 另外, 可逆的觀念(定義10③)對後面的討論非常重要, 一定要能隨時寫得出定義. 也請特別留意對實數成立, 但對矩陣不成立的一些性質(範例5).

§1. 矩陣的基本性質

1 定義:《矩陣》

① 將mn個數排成一個m列n行的長方形就稱爲一個尺度(*size*)$m\times n$的矩陣(*matrix*). 這mn個數用方括號或圓括號左右括起來.

② 若構成矩陣的每個數都是實數就說這矩陣是實數矩陣，或稱爲佈於實數系的矩陣. (a matrix *over* $\mathbb{R}$)

③ 所有$m\times n$實數矩陣所形成的集合記爲$\mathbb{R}^{m\times n}$，即

$$\mathbb{R}^{m\times n}=\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij}\in\mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbb{R}^{m\times n}$內的矩陣常簡記爲$[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $[a_{ij}]$.

④ 兩矩陣相等的意思是尺度相同，且每個對應位置都相等.

【要訣】(1) 矩陣的横排稱做列(*row*)，縱排稱爲行(*column*)，讀英文版線性代數的同學首先應辨明此二字.

(2) 矩陣的單數形是matrix，多數形是matrices.

(3) 描寫矩陣的尺度(size)時，先講高度(即列數)，再講寬度(即行數). 尺度2×3是表示高度2，寬度3的矩陣(亦即2列, 3行的矩陣), 2×3 (two by three)的×只是一個“標點符號”，因此，“尺度2×3”不能講成“尺度6”. 同理，$\mathbb{R}^{2\times 3}$與$\mathbb{R}^{6}$也不同.

(4) 通常將1×1矩陣看成是普通的數，也就是$\mathbb{R}^{1\times 1}=\mathbb{R}$.
有些書將$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$看成$[\,x_1\; x_2\; \ldots\; x_n\,]$，也就是$\mathbb{R}^{n}=\mathbb{R}^{1\times n}$. 有些書將$\mathbb{R}^{n}$當做是$\mathbb{R}^{n\times 1}$. 也有的將$\mathbb{R}^{n}$，$\mathbb{R}^{1\times n}$，$\mathbb{R}^{n\times 1}$看成彼此不同.

(5) 構成矩陣的那些數稱爲它的entry，描寫entry的位置時，先講列位

置, 再講行位置. 例如a_{23}通常是代表第2列的第3個entry.

(6) 有的書把$\mathbb{R}^{m\times n}$記爲$\text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$或$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, 而把$\mathbb{R}^{n\times n}$記爲$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(7) 佈於有理數系的所有$m\times n$矩陣所成的集合記爲$\mathbb{Q}^{m\times n}$; 佈於複數系的所有$m\times n$矩陣所成的集合, 記爲$\mathbb{C}^{m\times n}$; (佈於其他field依此類推).

2 定義:《各種矩陣》

① $\mathbb{R}^{n\times 1}$內的矩陣特稱爲行向量(*column vector*)或行矩陣(*column matrix*); $\mathbb{R}^{1\times n}$內的矩陣特稱爲列向量(*row vector*)或列矩陣(*row matrix*).

② 高度等於寬度的矩陣, 特稱爲方陣(*square matrix*). 對於方陣 $[a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ 構成主對角線.

③ 每個元素都是0的矩陣稱爲零矩陣, 記爲$O_{m\times n}$, $O_{n\times n}$簡記爲O_n.在不須強調尺度時可將零矩陣記爲O.

④ 方陣若主對角線外全是0, 就稱爲對角(線)矩陣(*diagonal matrix*). 若對角矩陣的主對角線元素由左上至右下依次爲$d_1, d_2, ..., d_n$, 則此矩陣可記爲$\text{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$. 另外, $kI=\text{diag}(k, k, ..., k)$稱爲常數矩陣.

⑤ 若方陣主對角線的左下方全部是0, 就稱爲上三角矩陣(*upper triangular matrix*).

若上三角矩陣的主對角線本身也全是0, 就稱爲嚴格(*strictly*)上三角矩陣.

若上三角矩陣的主對角線上全是1, 就稱爲單位(*unit*)上三角矩陣.

(下三角矩陣, 嚴格下三角矩陣, 及單位下三角矩陣的定義依此類推).

⑥ 矩陣中若只有第i列的第j個元素是1, 而其他都是0, 就記爲E_{ij} .

【要訣】(1) 本定義將$\mathbb{R}$換成$\mathbb{C}$，$\mathbb{Q}$, ..., 時仍適用. 以下雖然用$\mathbb{R}$解說, 但都可以換成其他數系(field). (field的定義見CH5定義1)

(2) 有的書不要求對角線矩陣, 上三角矩陣, 下三角矩陣是方陣.

(3) 對角線矩陣是上三角矩陣(其逆不真); 嚴格上三角矩陣是上三角矩陣(其逆不真).

習題2.1

寫出n階方陣$[a_{ij}]$ 爲下三角矩陣及嚴格下三角矩陣的充要條件.

3 定義:《矩陣的加法，係數積，線性組合》

對$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $k, k_1, k_2, ..., k_r\in\mathbb{R}$，定義：

① $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$, $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]$,

② $kA= [ka_{ij}]$.

③形如$k_1A_1+k_2A_2+...+k_rA_r$ 的式子稱爲$A_1, A_2, ..., A_r$的線性組合(linear combination).

【要訣】(1) 兩矩陣必須尺度完全相合才能相加，相減.

(2) 矩陣相加就是各對應元素相加，矩陣乘係數就是把係數遍乘矩陣內的各元素.

(3) $h[a_{ij}]+k[b_{ij}]=[ha_{ij}+kb_{ij}]$

(4) 若$A=[a_{ij}]$，則有 $A=\sum a_{ij}E_{ij}$

(5) ①中的計算內含mn次加減. ②中的計算內含mn次乘算.

(6) n階方陣的加法與係數積的計算複雜度都是$O(n^2)$.

習題3.1

設$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，求 ①$3A$ ②$A-B$ ③$3A+2B$

Ans: ① $\begin{bmatrix}6 & 15\\ 21 & 3\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}14 & 13\\ 27 & 3\end{bmatrix}$

習題3.2

求 $2\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 2 & -5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 4 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$$\text{Ans: }\begin{bmatrix} 9 & -2 & -7 \\ -12 & 10 & -13 \end{bmatrix}$$

習題3.3

試將 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ 表示成 $E_{i,j}$ 的線性組合(CH5定義9).

Ans: $2E_{11}+5E_{12}+3E_{13}+E_{21}-E_{22}+9E_{23}$

3 a 定理:《矩陣的運算性質I》

$m\times n$矩陣具有下列運算性質:

① $(A+B)+C=A+(B+C)$, ② $A+O=O+A=A$,

③ $A+(-A)=(-A)+A=O$, ④ $A+B=B+A$,

⑤ $(h+k)A=hA+kA$, ⑥ $h(A+B)=hA+hB$,

⑦ $(hk)A=h(kA)$, ⑧ $1A=A$.

【要訣】若只考慮加法與係數積兩種運算, 則$\mathbb{R}^{m\times n}$與$\mathbb{R}^{mn}$的結構完全相同. 因此前章定理2對矩陣仍對應成立.

【證】 略. (依定義驗證即得).

4 定義:《矩陣的乘法與乘冪》

① 若$A=[\,a_{ij}\,]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B=[\,b_{jk}\,]\in\mathbb{R}^{n\times s}$, 則定義 $AB=[\,c_{ik}\,]\in\mathbb{R}^{m\times s}$, 其中

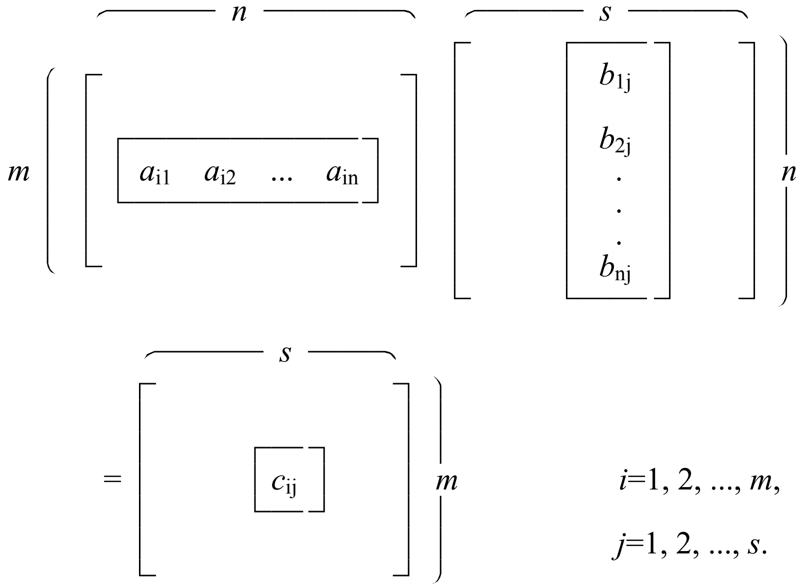
$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ 《*row-by-column rule*, 左橫右直規則.》

A是左因子, B是右因子, AB是乘積(*product*). 將B變成AB稱爲 "對B左乘(*premultiply*)A". 將A變成AB稱爲"對A右乘(*postmultiply*)B" .

② 對$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 定義$A$的$p$次方($p$-*power*)(又稱 p次乘冪)爲p個A相乘,
即 $A^2=AA$; $A^{k+1}=A^kA$, $k=1,2,\ldots.$

③ 對矩陣A, B, 若$AB=BA$, 則稱A, B可交換(*commute*).

【圖例】



$i=1, 2, ..., m,$

$j=1, 2, ..., s.$

【要訣】(1) “左因子”的寬度必須等於“右因子”的高度，否則不能相乘.

“乘積”的高度爲“左因子”的高度,

“乘積”的寬度爲“右因子”的寬度.

(2) 乘積的第i列第k行的元素由左因子的第i列與右因子的第k行依內積的方式相乘而得.

(3) A,B可乘時, B,A未必可乘. 即使可乘, AB與BA的尺度也未必相等. 即使尺度相等, $AB=BA$也未必成立.

也就是說交換律對矩陣乘法並不適用.

(原(4)(5)改編爲定理4a) .

(6) 矩陣必須高度與寬度相等才能定義乘冪.

(7) ①中的計算內含mns次乘算及$m(n-1)s$次加算.

(8) n階方陣的乘法的計算複雜度是$O(n^3)$.

習題4.1

對 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, 計算$AB$及$BA$.

Ans: $AB=\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

習題4.2

(a) 計算 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) 計算 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n}$

Ans: (a) $\begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

習題4.3

Let $A=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

(1) Compute A^2 and A^3 , What will A^n trun out to be ?

(2) What will B^n turn out to be ?

(提示: 此題不難, 實際乘乘看就知道了)

Ans: (1) $A^2=A$, $A^3=A$, $A^n=A$.

(2) n爲偶數時$B^n=I$; n爲奇數時$B^n=B$

(I的定義見本章定義10)

4 a 定理:《方陣的指數定律》

① 對方陣A, 及正整數p,q, 必$A^{p+q}=A^pA^q$.

② 對方陣A, 及正整數p,q, 必$(A^p)^q=A^{pq}$.

③ 對方陣A,B及正整數p, 未必$(AB)^p=A^pB^p$.

【要訣】(1) 對實數x, y及正整數p,q, 必$x^{p+q}=x^px^q$. $(x^p)^q=x^{pq}$, $(xy)^p=x^py^p$.其中前兩個性質對矩陣的乘冪仍成立, 但第三個性質不再成立.

【證】① A^{p+q} 是$p+q$個A相乘. 另一邊的A^pA^q是p個A相乘, q個A相乘, 之後兩者再相乘. 所以也是$p+q$個A相乘.

(本定理若要嚴格證明須利用結合律(定理9①)及數學歸納法.)

② 讀者自證.

③ 以p=2自行舉例.

4 b 定理:《對角矩陣的運算》

① $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots , a_n) + \mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots , b_n)=\mathrm{diag}(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots , a_n+b_n)$.

② $k\, \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots , a_n)=\mathrm{diag}(ka_1, ka_2, \ldots , ka_n)$.

③ $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots , a_n)\, \mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots , b_n)=\mathrm{diag}(a_1b_1, a_2b_2, \ldots , a_nb_n)$.

④ 對角線矩陣之間的乘法可交換.

⑤ $(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots , a_n))^m =\mathrm{diag}(a_1^m, a_2^m, \ldots , a_n^m)$.

【證】①②③讀者依矩陣乘法自證. (定義2)

④⑤由③即得.

4 c 範例:

設 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 對正整數$n$計算$A^n$及$B^n$.

【要訣】(1) 本例中的A是一個典型的idempotent. (詳情見CH10定義10)
(2) 本例中的B是一個典型的nilpotent. (詳情見CH14定義1)
(3) idempotent與nilpotent在舉反例時相當有用.

【解】由矩陣乘法計算即得知$A=A^2=A^3=\ldots\ldots$;

$$B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad O=B^3=B^4=B^5=\ldots\ldots$$

習題4c.1

計算 $\begin{bmatrix}0&*&*&*\\0&0&*&*\\0&0&0&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}^4$, 其中 $*$ 表示不介意其確實值的一些數.

Ans: $O_{4\times4}$

5 範例:《不成立的性質》

判斷下列各性質是否成立? 若成立則加以證明, 若不成立則舉反例.

① $AB=BA$,

② $(AB)^2=A^2B^2$,

③ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, (交大79工工[7])

④ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$,

⑤ 若$AB=O$, 則$A=O$或$B=O$,

⑥ 若$A^2=O$, 則$A=O$,

⑦ 若$AB=AC$, 且$A\neq O$, 則$B=C$,

⑧ 若$A^2=A$, 則 $A=O$或$A=I$.

【要訣】設$p(A, B)$是含有A, B的一個敘述. 有關此敘述的真僞, 有下列三種情形:

(ⅰ) 對任意A, B; $p(A,B)$都成立

(ⅱ) 存在A,B使 $p(A,B)$不成立 // (ⅱ)是(ⅰ)的否定敘述.

(ⅲ) 對任意A,B; $p(A,B)$都不成立

但習慣上都是把(ⅰ)的"對任意A,B"省略掉, 簡稱爲"$p(A,B)$成立" 將(ⅱ)簡稱爲"$p(A,B)$不成立". 至於(ⅲ), 可說成"$\neg p(A,B)$成立". 因此我們所看到的教科書都直接說矩陣乘法的交換律"不成立", 而不說"不恆成立".

【解】以上全都不成立.

①～④可舉$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$爲例, 請讀者自行驗證.

⑤～⑦可舉$A=B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$爲例, 請讀者自行驗證.

⑧可舉$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$爲例, 請讀者自行驗證.

◎ **5 a** 定理:《係數積與矩陣乘法》

$$① \; a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

② 對$a\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times1}$, $a\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}a$. //這不是交換律!!

③ 對$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{n\times1}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, 有 $(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{z})\,\boldsymbol{x}$. //這不是交換律!!

④ 對$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times1}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, 有 $(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})^2 = (\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})$. //這不是交換律!!

【要訣】(1) 對$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n\times1}$,

$\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}$是1×1矩陣, 也當做是數. 而 $\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}$ 是n×n矩陣, 兩者大不相同.

(2) ①中最左邊是係數積, 最右邊是矩陣乘法. 因習慣上不區分1×1矩陣與數. 所以可將①寫成如②. ③中第一個等號是矩陣乘法的結合律(定理9①).第二個等號是利用②. ④式右邊通常寫成$(\boldsymbol{yx})\boldsymbol{xy}$.

(3) 本定理一般書都未特別列出, 但在矩陣計算上很常用.
讀者務必要由上下文明確分辨哪裏是矩陣乘法, 哪裏是係數積.

【證】①②由矩陣乘法及係數積的定義驗證即得.

③ 讀者自證.

④ $(\boldsymbol{xy})^2=(\boldsymbol{xy})(\boldsymbol{xy})=((\boldsymbol{xy})\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{yx}))\boldsymbol{y}$ (定理9①)

$=((\boldsymbol{yx})\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$ (由②)

$=(\boldsymbol{yx})(\boldsymbol{xy})$ (定理9④)

習題5a.1:

(1) 對n=2寫出本定理各條的矩陣型式. (2) 證明本定理③.

◎ **6** 定理:《右直切, 左直切》

設任意矩陣X的第k個行向量記爲$X^{(k)}$,

① 對矩陣$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times s}$, $C\in\mathbb{R}^{m\times s}$,

$AB=C \iff \forall k, AB^{(k)}=C^{(k)}$ 《右直切分解法》

② 對$x_1, x_2, ..., x_n\in\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1A^{(1)}+x_2A^{(2)}+ \ \dots \ +x_nA^{(n)}$$ 《左直切展開法》

【要訣】(1) [(AB)的第j行]=A・[B的第j行]

(2) $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k$・[$A$的第$k$行]

【證】由矩陣乘法的定義仔細檢驗即得.

【實例】① $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \end{cases}$$

② $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

習題6.1: (參閱CH3範例12a)

已知$A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

將上述資訊用一個式子表示出來.

Ans: $A \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 9 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

習題6.2: (參閱CH6定理15)

試將下列敘述用左直切展開法寫成線性組合的形式:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ans: $$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

習題6.3: (參閱CH5定理17)
試用矩陣乘法寫出下面這個集合:

$$\left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ans: $$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 9 & -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \right\}$$

習題6.4 : (本書封面圖案)(此題應練習到能心算的地步!)
寫出下式經右直切分解，再做左直切展開後的等價敘述.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans: }\begin{cases} g\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\ \\ j\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \end{cases}$$

習題6.5: (參閱CH12定理19)

設$A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 1}$, $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbb{R}$,

且$A\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\boldsymbol{v}_1$， $A\boldsymbol{v}_2=\lambda_2\boldsymbol{v}$，以本定理驗證下式：

$$A\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

(等號兩邊都做右直切分解, 然後等號右邊再做左直切展開)

7 定理:《左橫切，右橫切》

設任意矩陣X的第k列向量記爲X_k,

① 對矩陣$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times s}$, $C\in\mathbb{R}^{m\times s}$,

$AB=C \iff \forall k, A_kB=C_k$ 《左橫切分解法》

② 對$y_1, y_2, ..., y_m\in\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,

$[\,y_1,..., y_m\,]\,A = y_1A_1+y_2A_2+\ \dots\ +y_mA_m$ 《右橫切展開法》

【要訣】(1) $[(AB)$的第i列$]= [A$的第i列$]\cdot B$

(2) $[\,y_1, \dots , y_m]A= \sum_k y_k\cdot [A$的第$k$列$]$

【證】由矩陣乘法的定義仔細檢驗即得.

【實例】① $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & s \end{bmatrix} \end{cases}$$

② $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} g & j \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} i & l \end{bmatrix}$

8 定理:《塊狀乘法，block multiplication》

① 對矩陣$A_{p\times n}$, $B_{q\times n}$, $C_{r\times n}$, $D_{n\times k}$, $E_{p\times k}$, $F_{q\times k}$, $G_{r\times k}$ 《左橫切分解法》

$$\begin{bmatrix} A \\ \hline B \\ \hline C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ D \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ \hline F \\ \hline G \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} AD=E\,, \\ BD=F, \\ CD=G\,. \end{cases}$$

② 對矩陣$A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{n\times q}$, $D_{n\times r}$, $E_{m\times p}$, $F_{m\times q}$, $G_{m\times r}$ 《右直切分解法》

$$\left[\begin{array}{c} \\ A \\ \\ \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c} B & C & D \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c} E & F & G \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} AB=E, \\ AC=F, \\ AD=G. \end{cases}$$

③ $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ & \cdots\cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}[b_{j1}, \ldots, b_{js}]$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}[b_{11}, \ldots, b_{1s}]+\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}[b_{21}, \ldots, b_{2s}]+\ldots+\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}[b_{n1}, \ldots, b_{ns}]$$

《左直切右橫切展開法》

④ 對矩陣$A_{m\times p}$, $B_{m\times q}$, $C_{m\times r}$, $D_{p\times n}$, $E_{q\times n}$, $F_{r\times n}$,

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & B & C \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} D \\ \hline E \\ \hline F \end{array}\right]=AD+BE+CF$$

《左直切右橫切展開法》

⑤ 對矩陣$A_{p\times r}$, $B_{p\times s}$, $C_{q\times r}$, $D_{q\times s}$, $E_{r\times t}$, $F_{r\times u}$, $G_{s\times t}$, $H_{s\times u}$,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}.$$

【要訣】(1) 口訣:

[左橫切]配[積橫切]做分解. (如①)

[右直切]配[積直切]做分解. (如②)

[左直切]配[右橫切]做展開. (如③④)

(2) 矩陣乘法可依塊狀方式切割計算，但須注意:

(a) 切割尺度依各條口訣，皆須兩相配合.

(b) 因子順序不可顛倒.

(3) 對乘積AB，將A刪除第i行得出A'，將B刪除第i列得出B'，若A的第i行全爲零或B的第i列全爲零，則由③得知$AB=A'B'$. ,

(4) 本定理只列出一些特例. 讀者應舉一反三，靈活運用. 定理6和定理7其實是定理8的特例. 但因較常用，所以特別列出.

【實例一】

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} c_1 & d_1 & e_1 \\ \hline c_2 & d_2 & e_2 \\ \hline c_3 & d_3 & e_3 \\ \hline c_4 & d_4 & e_4 \\ \hline c_5 & d_5 & e_5 \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}[\,c_1 \quad d_1 \quad e_1\,]+\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}[\,c_2 \quad d_2 \quad e_2\,]+\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}[\,c_3 \quad d_3 \quad e_3\,]$$

$$+\begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix}[\,c_4 \quad d_4 \quad e_4\,]+\begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix}[\,c_5 \quad d_5 \quad e_5\,]$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} c_1 & d_1 & e_1 \\ \hline c_2 & d_2 & e_2 \\ \hline c_3 & d_3 & e_3 \end{array}\right]+\left[\begin{array}{c|c} a_4 & a_5 \\ b_4 & b_5 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} c_4 & d_4 & e_4 \\ \hline c_5 & d_5 & e_5 \end{array}\right]$$

【實例二】

$$\left[\begin{array}{c|cc} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline a_7 & a_8 & a_9 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ \hline c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} \end{array}\right]$$

可切成下列四式:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_5 & b_6 & b_7 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_5 & c_6 & c_7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_8 \\ b_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_4 \\ c_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_5 & b_6 & b_7 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_9 & c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_8 \\ b_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{12} \end{bmatrix}$$

【證】①② 由矩陣的乘法定義仔細檢驗即得.

③ 由矩陣的乘法定義仔細檢驗即得.

④ 等式左右兩邊各依③展開比較即得.

⑤ 由①②做分解, 再各別依④展開即得.

習題8.1

依矩陣乘法驗算本定理所附的實例.

習題8.2 (參閱CH9定理19)

利用要訣3驗證

$$\begin{bmatrix} a & e & 0 & i \\ b & f & 0 & j \\ c & g & 0 & k \\ d & h & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p & q & r \\ 0 & 1 & s & t \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & e & i \\ b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p & q & r \\ 0 & 1 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

習題8.3 (參閱CH10定理26a)

驗證

$$\begin{bmatrix} x & 0 & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & p \\ d & h & l & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & i & m \\ c & k & p \\ d & l & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

習題8.4 (參閱CH13定理15)

驗證

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix}$$

9 定理:《矩陣的運算性質II》

① 對$m\times n$矩陣A , $n\times s$矩陣B , $s\times t$矩陣C , 必定 $(AB)C=A(BC)$.

② 對$m\times n$矩陣A , $n\times s$矩陣B, C, 必定 $A(B+C)=AB+AC$.

③ 對$m\times n$矩陣A, B, $n\times s$矩陣C, 必定 $(A+B)C=AC+BC$.

④ 對$m\times n$矩陣A, $n\times s$矩陣B, 及純量k, 必定 $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

【要訣】(1) ①式說明矩陣乘法滿足結合律; ②③說明矩陣乘法對加法滿足分配律; ④式稱爲混結合律(*mixed associative law*), 說明係數積與乘

法之間的關係.

(2) $\mathbb{R}^{n\times n}$配上矩陣加法與矩陣乘法形成一個具有單位元素的環, (*ring with identity*) (參閱附錄A).

(3) $\mathbb{R}^{n\times n}$配上矩陣加法與係數積形成一個向量空間.

(4) $\mathbb{R}^{n\times n}$配上矩陣加法、矩陣乘法、及係數積形成一個線性代數(*linear algebra*). (參閱附錄A).

(5) $\beta\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=\sum_{j=1}^{n}\beta\alpha_j$. (分配律)

(6) $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j$. (改變求和順序)

(7) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{jk}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}$. (改變求和順序)

† 【證】① (交大資工81[1])

檢驗尺度可發現$(AB)C$與$A(BC)$都是$m\times t$矩陣.

令 $A=[\,a_{ij}\,]$, $B=[\,b_{jk}\,]$, $C=[\,c_{kl}\,]$,

並令 $AB=[\,x_{ik}\,]$, $BC=[\,y_{jl}\,]$.

$\forall i=1,2,\ldots,m$, $\forall l=1,2,\ldots,t$,

$A(BC)$的第(i,l)位置

$=\sum_{j}a_{ij}\,y_{jl}=\sum_{j}a_{ij}(\sum_{k}b_{jk}\,c_{kl})$ (定義4)

$=\sum_{j}\sum_{k}(a_{ij}b_{jk}c_{kl})$ (要訣5)

$=\sum_{k}\sum_{j}(a_{ij}b_{jk}c_{kl})$ (要訣7)

$=\sum_{k}(\sum_{j}a_{ij}b_{jk})c_{kl}$ (要訣5)

$=\sum_{k}x_{ik}c_{kl}=(AB)C$的第$il$位置 (定義4)

$\therefore\ A(BC)=(AB)C$. (定義1④)

②檢驗尺度可發現$A(B+C)$與$AB+AC$都是$m\times s$矩陣.

令$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$, $C=[c_{jk}]$,

並令 $AB=[x_{ik}]$, $AC=[y_{ik}]$, $B+C=[z_{ik}]$.

$\forall i=1,2,\ldots,m$, $\forall k=1,2,\ldots,s$,

$A(B+C)$的第(i,k)位置

$=\sum_j a_{ij}z_{jk}=\sum_j a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})$ (定義3,4)

$=\sum_j (a_{ij}b_{jk}+a_{ij}c_{jk})=\sum_j a_{ij}b_{jk}+\sum_j a_{ij}c_{jk}$ (要訣6)

$=x_{ik}+y_{ik}=(AB+AC)$的第(i,k)位置 (定義3,4)

$\therefore$ $A(B+C)=AB+AC$. (定義1④)

③④留作習題.

†習題9.1

證明定理9③④.

10 定義:《單位矩陣，逆矩陣》

① 定義 *Kronecker delta* $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ;\ i=j\\ 0 & ;\ i\neq j\end{cases}$

② 在$\mathbb{R}^{n\times n}$中,主對角線元素都是1，而其他元素都是0的方陣稱爲n階單位方陣(*identity matrix*)，記爲I_n，或I. 即

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\ldots&0\\0&1&0&0&\ldots&0\\ &&\ldots\ldots&&&\\0&0&0&0&\ldots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\bigcirc\\&1&&\\&&\ddots&\\\bigcirc&&&1\end{bmatrix}$$

◎ ③ 設$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，若存在$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，滿足$AB=I_m$且$BA=I_n$ ，則稱A爲佈於$\mathbb{R}$的可逆矩陣(*invertible matrix*)，而B稱爲A的逆矩陣或反矩陣(*inverse*)，記爲$B=A^{-1}$. “A可逆”也常說成“A有逆矩陣”.

④ 設$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$及$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，若$AB=I_m$，則稱$A$爲$B$的左反矩陣

(*left inverse*), 稱B爲A的**右反矩陣**(*right inverse*).

⑤ 設A爲可逆方陣, 則A^{-n}定義爲$(A^{-1})^n$；對任意方陣A, 定義$A^0=I$.

【要訣】(1) 由於可逆矩陣必是方陣(CH8定理16a), 所以有許多書對可逆矩陣的定義還增添$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$的要求.
本定義若將$\mathbb{R}$換成其他數系(field)仍適用.

(2) 行列式等於0的方陣稱爲**奇異方陣**(*singular matrix*), 行列式不等於0的方陣稱爲**非奇異方陣**(*non-singular matrix*), 對佈於$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$的方陣而言, 可逆矩陣就是非奇異矩陣, 不可逆矩陣就是奇異矩陣.

(3) 設 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 則 $A\cdot I_n=A$, $I_m\cdot A=A$.

(4) 設A爲可逆方陣, 對任意整數r,s, 有$A^{r+s}=A^r\cdot A^s$.

(5) $I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n}$

◎ (6) 設$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,若$\Delta=ad-bc\neq 0$, 則$A$可逆,且$A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

(二階逆矩陣口訣: 主對角線對調, 其餘變號, 再除以行列式.)

(7) $\sum\limits_j a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik}$； $\sum\limits_j \delta_{ij}b_{jk}=b_{ik}$

＊ (8) $E_{ij}\,E_{st}=\delta_{js}\,E_{it}$, 亦即 $E_{ij}\,E_{st}=\begin{cases} E_{it} & ;\ 若 j=s. \\ O & ;\ 若 j\neq s. \end{cases}$

習題10.1

依定義證明要訣6.

習題10.2

求 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}$.   Ans: $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

習題10.3

試證 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不可逆.　(提示: 設方程式, 試解其逆矩陣)

10a 定理:《左反兼右反》

對矩陣A, 若存在L, R使得$LA=I$, $AR=I$, 則$L=R$.　(台大79電機X[5])

【要訣】(1) 有左反且有右反, 則左反等於右反. (於是就可逆.)
(2) 這個定理其實是ring with identity或monoid的定理. (見附錄A)

【證】$L=LI=L(AR)=(LA)R=IR=R$.

11 定理:《單位矩陣與逆矩陣的唯一性》

① 若$J\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 滿足$\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $AJ=JA=A$. 則 $J=I$　《單位矩陣的唯一性》

② 對$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 若$A_1, A_2\in\mathbb{R}^{n\times m}$都是$A$的逆矩陣, 則$A_1=A_2$
《逆矩陣的唯一性》

【要訣】本定理在$\mathbb{R}$換成其他數系時仍成立, 這個定理其實是ring的定理.

【證】① $J=JI$　(I 的特性)
$=I$　(已知條件中取A爲I)

② (清大84工工[5])

由定義得知 $AA_1=I_m$, $A_1A=I_n$, 且 $AA_2=I_m$, $A_2A=I_n$,

$\therefore\ A_1=A_1I_m=A_1(AA_2)=(A_1A)A_2=I_nA_2=A_2$.

12 定理:《逆矩陣的基本性質》

① 若A,B皆爲可逆矩陣, 則AB亦爲可逆矩陣, 且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

② 若A爲可逆矩陣, n爲正整數, 則A^n亦爲可逆矩陣, 且$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$.

③ 若A爲可逆矩陣, 則A^{-1}亦爲可逆矩陣, 且$(A^{-1})^{-1}=A$.

④ 若A爲可逆矩陣, 純量$k\neq 0$, 則kA可逆, 且$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

⑤ 若A爲可逆矩陣, B爲不可逆矩陣, 則AB爲不可逆矩陣. (元智83工工[5])
若A爲不可逆矩陣, B爲可逆矩陣, 則AB爲不可逆矩陣.

【要訣】(1) 注意$(AB)^{-1}$展開的次序要對調.
(2) 本定理①②③⑤其實是ring with identity的定理. (見附錄A)
(3) 通常$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$, 這即使在$A, B \in \mathbb{R}$時也不對.
(4) 若A,B皆爲不可逆矩陣, 我們不能推論AB是否可逆.
但若加上“方陣”的條件, 則可由CH3定理20推論AB不可逆.
＊(5) ①②表示$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A$可逆 $\}$配上矩陣乘法形成一個群. (稱爲 *general linear group*, 記爲GL$(n,\mathbb{R})$).

【證】① (成大83統計[6])

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$$

$\therefore AB$可逆, 且$B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$ (定義10③)

②由①套用數學歸納法即可得證.

③$\because$ $A(A^{-1})=I$, $A^{-1}A=I$,
$\therefore$ A^{-1}可逆, 且$A=(A^{-1})^{-1}$. (定義10③)

④ 讀者自證.

⑤ 已知A可逆, B不可逆, 欲以矛盾法證明AB不可逆:
假設AB可逆, 由③,①得知$A^{-1}(AB)$仍可逆, 此即B可逆, 與已知矛盾.
另一部份讀者自證.

習題12.1

① 若A,B,C皆可逆, 證明ABC可逆, 且$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.
② 若A可逆, 證明$-A$可逆, 且$(-A)^{-1}=-(A^{-1})$.

習題12.2

對於方陣A,B, 若A爲可逆, 證明$(ABA^{-1})^3=AB^3A^{-1}$.

習題12.3 (淡江84資工[1])(大同87資工[1])

已知A, B, $A+B$可逆, 求證$A^{-1}+B^{-1}$可逆, 且
$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.
(提示: $(A^{-1}+B^{-1})A=(I+B^{-1}A)=B^{-1}(B+A)$)

習題12.4 (中央85資工[2](f))
[是非論證題] If AB is invertible, then B is invertible.

Ans: False.

12a 定理:《矩陣移項與消去律》

對矩陣A,B,C,X,

① 若$AX=B$, 且A可逆, 則$X=A^{-1}B$. ② 若$XA=B$, 且A可逆, 則$X=BA^{-1}$.

③ 若$AB=AC$, 且A可逆, 則$B=C$. ④ 若$BA=CA$, 且A可逆, 則$B=C$.

【要訣】(1) 對矩陣乘法作移項時, 要注意左因子移到等號另一邊仍是左因子, 右因子移到等號另一邊仍是右因子.

(2) $A+X=B \implies X=-A+B=B-A$.

(3) 可將③的條件“A可逆”降爲“A有左反”.
可將④的條件“A可逆”降爲“A有右反”.

【證】①由$AX=B$的等號兩邊同時左乘A^{-1}, 可得 $A^{-1}AX=A^{-1}B$,
即 $IX=A^{-1}B$, $\therefore$ $X=A^{-1}B$.
②讀者自證.
③等號兩邊同時左乘A^{-1} , 得 $A^{-1}AB=A^{-1}AC$ $\therefore B=C$
④讀者自證.

習題12a.1
證明: 若$AB=BA$且A可逆, 則$BA^{-1}=A^{-1}B$.

習題12a.2
證明: ①若P可逆, $P^{-1}AP=I$, 則$A=I$;
②若P可逆, $P^{-1}AP=O$, 則$A=O$;

③若$A^2=A$, A可逆, 則$A=I$.

習題12a.3

對於可逆方陣A,B, 試證下列各敘述等價:

(ⅰ) $AB=BA$

(ⅱ) $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(ⅲ) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

(ⅳ) $(AB)^2=A^2B^2$

(註: 各敘述等價的意思是互爲充分必要條件, 也就是說可由其中任何一式推證出其他任何一式.)

§2. 矩陣的代數演算

13 定理:《缺角矩陣》

① 設A, C爲$m\times m$矩陣, B, D爲$n\times n$矩陣, H, K爲$m\times n$矩陣, P, Q爲$n\times m$矩陣, 則

$$\begin{bmatrix} A & H \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & K \\ O & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AC & AK+HD \\ O & BD \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ P & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & O \\ Q & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AC & O \\ PC+BQ & BD \end{bmatrix}.$$

② 設A爲$m\times m$矩陣, B爲$n\times n$矩陣, r爲正整數, 則

$$\begin{bmatrix} A & * \\ O & B \end{bmatrix}^{\mathrm{r}}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{r}} & * \\ O & B^{\mathrm{r}} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} A & O \\ * & B \end{bmatrix}^{\mathrm{r}}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{r}} & O \\ * & B^{\mathrm{r}} \end{bmatrix},$$

其中$*$表示我們不介意其確實值的部份.

③ 設A, B, H, P 分別爲$m\times m$, $n\times n$, $m\times n$, $n\times m$矩陣.

若A, B都可逆, 則 $\begin{bmatrix} A & H \\ O & B \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & O \\ P & B \end{bmatrix}$皆可逆, 且

$$\begin{bmatrix} A & H \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}HB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & O \\ P & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}PA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

【解】① 由塊狀乘法即得.

② 由①利用數學歸納法即得證.

③ (清大79資料[3])(台大79電機X[1])

令X_1, X_2, X_3, X_4分別爲$m\times m$, $m\times n$, $n\times m$, $n\times n$矩陣. 設

$$\begin{bmatrix} A & H \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix} \qquad \text{(定義10③)}$$

展開得 $AX_1 + HX_3 = I_m$, $BX_3 = O$, $AX_2 + HX_4 = O$, $BX_4 = I_n$ (定理8)

解出 $X_3 = O$, $X_4 = B^{-1}$, $X_1 = A^{-1}$, $X_2 = -A^{-1}HB^{-1}$.

又 $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}HB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & H \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$

故得證. (定義10③)

習題13.1 (工技84電機[8])

Block matrix $A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix}$, 其中$B$與$D$皆爲正矩陣(square matrix)

且反矩陣B^{-1}及D^{-1}存在, 則A^{-1}=?

Ans: $\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$

習題13.2 (中央84資工[4])

The inverse of block matrix $\begin{bmatrix} I & O & O \\ A & I & O \\ B & C & I \end{bmatrix}$ is $\begin{bmatrix} I & O & O \\ X & I & O \\ Y & Z & I \end{bmatrix}$.

Find matrices X, Y, and Z.

Ans: $X=-A$, $Y=CA-B$, $Z=-C$.

† **13a** 定理:《三角矩陣的性質》

① 若$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$爲$n\times n$上(下)三角矩陣，且$AB=[c_{ik}]$,
則AB也是上(下)三角矩陣，且$\forall i$, $c_{ii}=a_{ii}b_{ii}$.

② 若$A=[a_{ij}]$爲$n\times n$上(下)三角矩陣，且$A^m=[c_{pq}]$,
則A^m也是上(下)三角矩陣，且$\forall i$, $c_{ii}=a_{ii}^m$.

③ 若$A=[a_{ij}]$爲$n\times n$上(下)三角矩陣，且$\forall i$, $a_{ii}\neq 0$, 則A可逆.
令$A^{-1}=[x_{pq}]$, 則A^{-1}也是上(下)三角矩陣，且$\forall i$, $x_{ii}=a_{ii}^{-1}$.

④ 若A爲$n\times n$嚴格上(下)三角矩陣，則$A^n=O_n$.

【要訣】(1) 對方陣$A=[a_{ij}]$,

A爲上三角矩陣

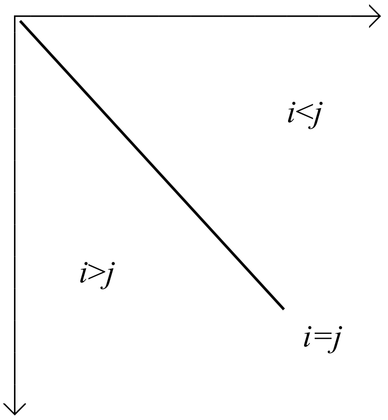
$\iff$ “$i>j \implies a_{ij}=0$”

A爲嚴格上三角矩陣

$\iff$ “$i\geq j \implies a_{ij}=0$”

A爲對角線矩陣

$\iff$ “$i\neq j \implies a_{ij}=0$”



＊【證】我們只證上三角的部份，下三角的部份讀者自證.

① 已知$i>j$時$a_{ij}=0$,　$j>k$時$b_{jk}=0$.

當$i>k$時，對各個j，必$j>k$或$j<i$，∴ $a_{ij}=0$或$b_{jk}=0$　∴ $a_{ij}b_{jk}=0$

$$\therefore\ c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}=\sum_{j=1}^{n} 0=0\ .$$

∴ AB爲上三角矩陣.

當 $i\neq j$ 時，必 $i>j$ 或 $j>i$，　∴ $a_{ij}=0$ 或 $b_{ji}=0$，　∴$a_{ij}b_{ji}=0$

$$\forall\ i,\ c_{ii}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=i}^{i} a_{ij}b_{ji}=a_{ii}b_{ii}$$

② 由①經數學歸納法即得證.

③ (清大79資科[4]) 讀者自證.(可利用定理13以數學歸納法加以證明).

④ 略(可利用定理13以數學歸納法加以證明).

†習題13a.1

若$A=[a_{ij}]$爲$n\times n$上(下)三角矩陣, $f(x)$爲多項式, $f(A)=[c_{pq}]$,　(見定義15)

則$f(A)$也是上(下)三角矩陣，且$\forall i$, $c_{ii}=f(a_{ii})$.

14 範例:《矩陣方程式》

解矩陣方程式 $\begin{cases} AX+BY=C \\ DX+EY=F\ , \end{cases}$

其中A, B, C, D, E, F, X, Y皆爲方陣，且已知下列矩陣都可逆:

$A, B, D, E, A^{-1}B-D^{-1}E, B^{-1}A-E^{-1}D$.

【解】第一式左乘A^{-1}，第二式左乘D^{-1}，得

$$\begin{cases} X+A^{-1}BY=A^{-1}C \\ X+D^{-1}EY=D^{-1}F \end{cases}$$

相減得:　$(A^{-1}B-D^{-1}E)Y=(A^{-1}C-D^{-1}F)$

∴ $Y=(A^{-1}B-D^{-1}E)^{-1}(A^{-1}C-D^{-1}F)$

又由原式可得:

$$\begin{cases} B^{-1}AX+Y=B^{-1}C \\ E^{-1}DX+Y=E^{-1}F \end{cases}$$

相減得: $(B^{-1}A-E^{-1}D)X=(B^{-1}C-E^{-1}F)$

$\therefore \quad X=(B^{-1}A-E^{-1}D)^{-1}(B^{-1}C-E^{-1}F)$

【註】實務上遇到數值問題時, 應先套定理8併成下式, 再依CH3範例12a求解.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$$

15 定義:《方陣的多項式》

對多項式 $f(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_1x+a_0$, 及$n$階方陣$A$,

定義 $f(A)=a_k A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\dots+a_1A+a_0 I_n$

習題15.1

設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f(x)=x^3-5x^2+7$, 求 $f(A)$. Ans: $\begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

16 定理:《方陣多項式定理》

① 對多項式$f(x)$, $g(x)$, 及方陣A,

(a) 若$s(x)=f(x)+g(x)$, 則 $s(A)=f(A)+g(A)$

(b) 若$p(x)=f(x)g(x)$, 則 $p(A)=f(A)g(A)$

◎ ② 只含一個不定元x的多項式之間的等式, 若x以方陣A代入, 則等式仍成立.

③ 對多項式$f(x)$,$g(x)$,及方陣A, 必定 $f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

④ 對多項式$f(x)$,$g(x)$,及方陣A, 若$g(A)$可逆, 則 $g(A)^{-1}f(A)=f(A)g(A)^{-1}$

⑤ 含不定元x,y的多項式之間的等式, 若方陣A,B可交換, 以A代入x, 以B代入y, 則等式仍成立.

【要訣】(1) 雖然矩陣乘法無交換性，但兩個A的多項式相乘必可交換.

(2) $xy=yx$不能推得$AB=BA$，所以⑤必須另加方陣A,B可交換的條件才能使用.

＊【證】① (a) 讀者仿(b)自證.

(b) 設$f(x)=\sum_{n=0}^{h} a_n x^n$, $g(x)=\sum_{m=0}^{k} b_m x^m$, $p(x)=\sum_{t=0}^{h+k} c_t x^t$，則 $c_t=\sum_{n=0}^{t} a_n b_{t-n}$

$$f(A)g(A)=\left(\sum_{n=0}^{h} a_n A^n\right)\left(\sum_{m=0}^{k} b_m A^m\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{h}\sum_{m=0}^{k}(a_nA^n)(b_mA^m) \qquad \text{(由矩陣的代數性質而得)}$$

$$=\sum_{n=0}^{h}\sum_{m=0}^{k}(a_nb_mA^{m+n})$$

$$=\sum_{t=0}^{h+k}\left(\sum_{n=0}^{t}a_nb_{t-n}\right)A^t \qquad \text{(由上式對}A\text{的各次方集項而得)}$$

$$=\sum_{t=0}^{h+k}c_tA^t=p(A)$$

②因多項式只由加、係數積及x的乘冪構成，由①即知②成立.

③由$f(x)g(x)=g(x)f(x)$套用②即得.

④由③， $f(A)\,g(A)=g(A)\,f(A)$.

等號兩邊左乘$g(A)^{-1}$,右乘$g(A)^{-1}$即得.

⑤略.

17 範例:《方陣多項式定理的應用》

設A爲方陣，且$A=A^2=A^3=A^4=\ldots..$,

① 利用二項式定理證明 $\forall n\in\mathbb{N}, (I+A)^n=I+(2^n-1)A$.

② 證明$I+A$可逆，並求$(I+A)^{-1}$.

【要訣】(1) 二項式定理: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

(2) $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

【解】① $(A+I)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A = I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) A = I + (2^n - 1)A .$$

② $(A+I)(kA+I) = kA^2 + A + kA + I = (2k+1)A + I$

令 $k = -1/2$, 則$(A+I)(kA+I) = I$, 同理, $(kA+I)(A+I) = I$.

$\therefore$ $(A+I)$可逆, 且$(A+I)^{-1} = (I-(1/2)A)$.

【註】本題①若不使用二項式定理, 也可利用數學歸納法證明.

習題17.1 (交大78資工[3])

設r是大於1的整數, 矩陣A滿足 $A^r - I = O$, 且$A-I$ 可逆.

(a) 證明 $A^{r-1} + A^{r-2} + \ldots + A = -I$

(b) 由(a)證明A可逆, 且A^{-1}可表成A的多項式.

(提示: 對 $x^r - 1$ 分解因式)

習題17.2 (清大76資科[6])

計算 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n$ (提示: 利用 $(3+x)^n$ 的二項展開式)

Ans: $\begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$

習題17.3

設$A^2 = A \neq O$, ①求算$(I+kA)^m$ ②求使$I+kA$可逆的k.

Ans: ① $I+((1+k)^m-1)A$ ② $k\neq-1$.

†習題17.4 (中正82統計[三3])

① 設A爲$n\times n$矩陣且$A^2=\alpha A$, $\alpha\neq-1$，求證$I+A$可逆.

② 設$A=[\ a_{ij}\ ]$, $a_{ij}=2^{-(i+j)}$，求$(I+A)^{-1}$.

Ans: ①仿本範例②可求出$A^{-1}=I+kA$, $k=-(1+\alpha)^{-1}$,

② 先求出①中的$\alpha=(1/3)(4^n-1)/4^n$

$(I+A)^{-1}=I-((3\cdot4^n)/(4^{n+1}-1))A$.

18 定義:《方陣的分式》

對多項式$f(x)$, $g(x)$，及方陣A，若$g(A)$可逆，則可定義

$$\frac{f(A)}{g(A)}=g(A)^{-1}f(A)=f(A)g(A)^{-1}$$

【要訣】(1)通常$B^{-1}A\neq AB^{-1}$，所以$\dfrac{A}{B}$ 無法合理定義.

(2)定理16④爲本定義之根據.

(3)設$g(A)$, $h(A)$皆可逆，則$\dfrac{f(A)h(A)}{g(A)h(A)}=\dfrac{f(A)}{g(A)}$

習題18.1

證明要訣(3).

19 定理:《方陣分式定理》

① 對分式$f(x)$, $g(x)$，設$f(x)$,$g(x)$之最低公分母爲$d(x)$，且$d(A)$可逆，則

(a) 若$s(x)=f(x)+g(x)$，則$s(A)=f(A)+g(A)$

(b) 若$p(x)=f(x)g(x)$，則$p(A)=f(A)g(A)$

◎ ② 只含一個不定元x的分式之間的等式，若x以方陣代入時，各分母皆可逆，則等式仍成立.

＊【證】略, 讀者自證.

†**20** 範例:《方陣分式定理的應用》

已知$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, 求$(A^2+3A-5I)(A+I)^{-1}$.

【解】$\dfrac{x^2+3x-5}{x+1}=x+2-\dfrac{7}{x+1}$

$$(A+I)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

原式 $=A+2I-7(A+I)^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\frac{7}{6}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 13 & 10\end{bmatrix}$$

#

【說明】上述解法的計算比直接求算簡單.

＊ 習題20.1

接本範例, 求$(A+3I)(A+2I)^{-1}(A+I)^{-1}$.

(提示: 先對$g(x)=\dfrac{x+3}{(x+2)(x+1)}$ 做分項分式)

Ans:$\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix}8 & 0\\ -3 & 5\end{bmatrix}$

21 範例:《矩陣的泰勒展開式》 (清大72計管[4]改編)

設N爲$n\times n$矩陣,且$N^5=O$. 證明 $I+N$ 可逆, 並將$(I+N)^{-1}$表爲 N 的多項式.

【要訣】本題由$(1+x)^{-1}$的泰勒展開式猜出$(I+N)^{-1}$的表示法.

【解】$(I+N)(I-N+N^2-N^3+N^4)$

$=(I-N+N^2-N^3+N^4)+(N-N^2+N^3-N^4+N^5)=I+N^5=I$

$(I-N+N^2-N^3+N^4)(I+N)=\ldots=I+N^5=I$

$\therefore$ $I+N$可逆矩陣，且$(I+N)^{-1}=(I-N+N^2-N^3+N^4)$. (定義10③)

習題21.1 [是非題](88中央資工[1](10))

If A is a nonzero square matrix and A^3 is the zero matrix, then it is possible that $A-I$ is singular.

Ans: False. $A-I$必可逆，且可求得$(A-I)^{-1}=(-A^2-A-I)$.

習題21.2

接本範例，證明 $I-2N$ 也可逆，並求出它的逆矩陣.

§3. 轉置，跡

22 定義:《轉置，共軛轉置》

① 對$A=[a_{pq}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$，若$B=[b_{rs}]\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 滿足

$b_{rs}=a_{sr}$; $r=1,2,\ldots,n$; $s=1,2,\ldots,m$.

則稱B為A的轉置矩陣(*transpose*)，記為A^T，或A^t，有的書記為A'.

② 對$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{m\times n}$，將$A$中每個元素都取共軛複數所得的矩陣記為 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=[\overline{a_{ij}}]$.

③ 對$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\overline{A}^T$ 稱為A的共軛轉置(*tranjugate*)，或稱為A的*Hermitian*，可記為A^H，或A^* .

④ 對$S\subseteq\mathbb{C}^{m\times n}$， 定義:

$$S^{T}=\{A^{T}\mid A\in S\},\quad \overline{S}=\{\overline{A}\mid A\in S\},\quad S^{H}=\{A^{H}\mid A\in S\}.$$

【要訣】(1) 轉置矩陣就是把原矩陣的行變成列, 列變成行.

(2) 將①中的$\mathbb{C}$換成其它數系仍適用.

(3) $\mathrm{tr}(A^{T})=\mathrm{tr}A$. (見定義27)

(4) $\overline{A^{T}}=(\overline{A})^{T}$. (見定理23)

(5) $I=I^{T}$.

(6) 若 $S\subseteq\mathbb{C}^{m\times n}$, 則 $S^{T}\subseteq\mathbb{C}^{n\times m}$, $\overline{S}\subseteq\mathbb{C}^{m\times n}$, $S^{H}\subseteq\mathbb{C}^{n\times m}$.

習題22.1

求下列矩陣的轉置矩陣

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}$

Ans: (a) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\\ 7 & 1\end{bmatrix}$

習題22.2

① $\{[1 \quad 2+6i], [5-4i \quad 9i]\}^{H}=?$

② $(\mathbb{R}^{2\times3})^{T}=?$

Ans: ① $\left\{\begin{bmatrix}1\\ 2-6i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5+4i\\ -9i\end{bmatrix}\right\}$ ② $\mathbb{R}^{3\times2}$

2 3 定理:《轉置與共軛的基本性質》

(a) $\overline{A^{\mathrm{T}}} = (\overline{A})^{\mathrm{T}}$. $A^{\mathrm{TH}} = A^{\mathrm{HT}} = \overline{A}$ $\overline{A^{\mathrm{H}}} = (\overline{A})^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{T}}$

(b)對矩陣A,B, 純量a, 正整數k, 及多項式$f(x)=\sum a_i x^i$

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$ ② $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

③ $(aA)^{\mathrm{T}}=aA^{\mathrm{T}}$ ④ $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

⑤ $(A^k)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^k$ ⑥ $(f(A))^{\mathrm{T}}=f(A^{\mathrm{T}})$

(c)對複數矩陣A,B, 複數a, 正整數k, 及多項式$f(x)=\sum a_i x^i$

① $\overline{\overline{A}}=A$ ② $\overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B}$

③ $\overline{aA} = \overline{a}\ \overline{A}$ ④ $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$

⑤ $\overline{(A^k)}=(\overline{A})^k$ ⑥ $\overline{\sum a_i A^i}=\sum \overline{a}_i (\overline{A})^i$

(d)對複數矩陣A,B, 及複數a,

① $A^{\mathrm{HH}}=A$ ② $(A+B)^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}+B^{\mathrm{H}}$

③ $(aA)^{\mathrm{H}}=\overline{a}\,A^{\mathrm{H}}$ ④ $(AB)^{\mathrm{H}}=B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}$

⑤ $(A^k)^{\mathrm{H}}=(A^{\mathrm{H}})^k$ ⑥ $(\sum a_i A^i)^{\mathrm{H}}=\sum \overline{a}_i (A^{\mathrm{H}})^i$

【要訣】(1) 要特別注意比較(b)(c)(d)④式中因子的順序.

(2) 各個②式當然要在A,B的尺度相同時才能相加, 各個④式當然要在A的寬度等於B的高度時才能相乘.

(3) 設A為$m\times n$矩陣, B為$p\times q$矩陣,

則 B^{T}為$q\times p$矩陣, A^{T}為$n\times m$矩陣, 且

A,B可乘 $\Longleftrightarrow$ $n=p$ $\Longleftrightarrow$ B^{T}, A^{T}可乘 .

(4) (b)②③顯示轉置滿足線性條件: $(aA+bB)^{\mathrm{T}}=aA^{\mathrm{T}}+bB^{\mathrm{T}}$

(c)②③顯示共軛滿足半線性條件: $\overline{(aA+bB)}=\overline{a}\ \overline{A}+\overline{b}\ \overline{B}$

(d)②③顯示共軛轉置滿足半線性條件: $(aA+bB)^{\mathrm{H}}=\overline{a}A^{\mathrm{H}}+\overline{b}B^{\mathrm{H}}$

†【證】(b) ④ 設A為$m\times n$矩陣, B為$n\times l$矩陣,

可驗知$(AB)^{\mathrm{T}}$與$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$都是$l\times m$矩陣.

令$A=[a_{\mathrm{ij}}]$, $B=[b_{\mathrm{jk}}]$, $AB=[c_{\mathrm{ik}}]$, $A^{\mathrm{T}}=[d_{\mathrm{ji}}]$, $B^{\mathrm{T}}=[e_{\mathrm{kj}}]$, $(AB)^{\mathrm{T}}=[f_{\mathrm{ki}}]$

$\forall\ k=1,2,\ldots,l,\quad \forall i=1,2,\ldots,m,$

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$的$(k,i)$位置

$$= \sum_{\mathrm{j}} e_{\mathrm{kj}}d_{\mathrm{ji}} = \sum_{\mathrm{j}} b_{\mathrm{jk}}a_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{j}} a_{\mathrm{ij}}b_{\mathrm{jk}} = c_{\mathrm{ik}} = f_{\mathrm{ki}}$$

$= (AB)^{\mathrm{T}}$的(k,i)位置

$\therefore\ (AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

(b) ⑤ 以數學歸納法對k證明:

$k=1$時自動成立.

設$k=r$時成立, 對$k=r+1$,

$(A^{\mathrm{k}})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{r}}A)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$ (④)

$=A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{r}}$ (歸納法的假設)

$=(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{k}}$

其它部份讀者自證.

習題23.1

① 化簡$(BA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ ② 化簡$(-A+2BC+DE^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

Ans: ① AB^{T} ② $-A^{\mathrm{T}}+2C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+FED^{\mathrm{T}}$

習題23.2

對正整數n及方陣A, 證明$(A^{\mathrm{n}})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{n}}$, $(A^{\mathrm{n}})^{\mathrm{H}}=(A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{n}}$.

24 定理:《轉置與逆矩陣的關係》

設A爲可逆矩陣, 則

① A^{T}爲可逆矩陣, 且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

② $\overline{A}$爲可逆矩陣, 且 $(\overline{A})^{-1}=\overline{A^{-1}}$.

③ A^{H}爲可逆矩陣, 且 $(A^{\mathrm{H}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{H}}$.

④ $-A$爲可逆矩陣, 且 $(-A)^{-1}=-(A^{-1})$.

【要訣】(1) 根據本定理，有的書將$(A^{T})^{-1}$, $(A^{-1})^{T}$都簡寫爲A^{-T}. 並將$(A^{H})^{-1}$, $(A^{-1})^{H}$ 都簡寫爲A^{-H}. 演算時相當方便.

【證】① $A^{T}(A^{-1})^{T}=(A^{-1}A)^{T}$ (定理23④)

$=I^{T}=I$

$(A^{-1})^{T}A^{T}=(AA^{-1})^{T}=I^{T}=I$

∴ A^{T}可逆，且$(A^{-1})^{T}$爲A^{T}之反矩陣 (定義10③)

②③④讀者自證.

25 定義:《對稱矩陣，斜對稱矩陣，正交矩陣》

對方陣A,

① 若$A^{T}=A$, 則稱A爲對稱矩陣(*symmetric matrix*).

② 若$A^{T}=-A$, 則稱A爲斜對稱矩陣(*skew–symmetric matrix*)，或稱反對稱矩陣(*anti–symmetric matrix*).

③ 若$A^{T}A=AA^{T}=I$, 則稱A爲正交矩陣(orthogonal matrix).

【要訣】(1) 若$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$， 設$A$的行向量依次爲$C_1$, C_2, ..., C_n,

由矩陣乘法的定義得知:

$$A^{T}A=I_n \iff C_i^{T}C_j=\begin{cases}1 & ,\ i=j\\ 0 & ,\ i\neq j\end{cases}$$

亦即A的行向量都是單位向量，且兩兩正交.

若$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 前述的討論須稍加修改，這將在CH13詳細討論.

(2) 若$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$， 設$A$的列向量依次爲$R_1$, R_2, ..., R_m，則有:

$$AA^{T}=I_m \iff R_iR_j^{T}=\begin{cases}1 & ,\ i=j\\ 0 & ,\ i\neq j\end{cases}$$

亦即A的列向量都是單位向量，且兩兩正交.

(3) 由(1)(2)看來,合於本定義③的矩陣應稱爲“orthonormal matrix”較合理. 但沒有這個術語.

(4) A是正交矩陣 $\iff$ A可逆且$A^{-1}=A^{T}$.

(5) 令$A=[\,a_{ij}\,]$, 則A是對稱矩陣的條件可寫成 $\forall i, j$, $a_{ij}=a_{ji}$.

(6) 令$A=[\, a_{ij}\,]$, 則A是斜對稱矩陣的條件可寫成 $\forall i, j,\ a_{ij}=-a_{ji}$.

(7) 斜對稱矩陣的主對角線元素皆爲0.

習題25.1

設實數矩陣A既是對稱矩陣又是斜對稱矩陣, 證明$A=O$.

習題25.2

試寫出 $A^T=A,\ A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一般形

$$\text{Ans:}\quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},\ a, b, c\in\mathbb{R}$$

習題25.3

驗證 $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 爲正交矩陣.

習題25.4 (淡江85資工[4])

設$w\in\mathbb{R}^{n\times 1},\ A=I-2(w^Tw)^{-1}(ww^T)$.

證明①$A^T=A$, ②$A^2=I$, ③$AA^T=A^TA=I$. (hint:定理5a)

習題25.5 (交大83統計[4](c))

Let $A=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

Find x_1 , x_2 , x_3 such that A is an orthogonal matrix.

Ans : $\pm 1,\ \pm 1,\ \mp 2$.

(原定理26改編爲定理26a及定理26b)

26a 定理:《對稱，斜對稱的不變性》

① 若A,B爲$n\times n$對稱矩陣，則 $\forall$純量h, k, $hA+kB$仍爲$n\times n$對稱矩陣.

② 若A,B爲$n\times n$斜對稱矩陣，則 $\forall$純量h, k, $hA+kB$仍爲$n\times n$斜對稱矩陣.

③ 若A爲$n\times n$對稱矩陣，則$-A$仍爲$n\times n$對稱矩陣.
若A再可逆，則A^{-1}仍爲$n\times n$對稱矩陣.

④ 若A爲$n\times n$斜對稱矩陣，則$-A$仍爲$n\times n$斜對稱矩陣.
若A再可逆，則A^{-1}仍爲$n\times n$斜對稱矩陣.

【要訣】(1) 從向量空間(第5章)的術語來看, ①表示對稱矩陣所成的集合形成矩陣空間的子空間, ②表示斜對稱矩陣所形成的集合也形成矩陣空間的子空間.

【證】① $(hA+kB)^{\mathrm{T}}=hA^{\mathrm{T}}+k\,B^{\mathrm{T}}=hA+kB$ (定理23②③)
其它部份讀者自證.

習題26a.1 (大同80資工)

True or False: 若A, B都對稱，則AB也必對稱.

Ans: False, 反例請在2×2矩陣內自尋.

26b 定理:《正交矩陣的不變性》

① A爲正交矩陣 $\Longleftrightarrow$ A可逆且$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$.

② 若$n\times n$矩陣A,B爲正交矩陣，則AB仍爲$n\times n$正交矩陣.

③ 若A爲正交矩陣，則$-A$, A^{T}, A^{-1}仍爲正交矩陣.

【要訣】$\ast$ (1) 從群(附錄A)的術語來看，由②③得知正交矩陣所成的集合形成可逆矩陣乘法群的一個子群.

【證】① 由正交與逆矩陣的定義即得.

② $(AB)^{T}(AB)=B^{T}A^{T}AB$ (定理23④)

$=B^{T}IB=B^{T}B=I$ (定義25③)

同理可證 $(AB)(AB)^{T}=I$, 故得證.

③ $(A^{-1})^{T}(A^{-1})=(A^{T})^{-1}A^{-1}$ (定理24)

$=(AA^{T})^{-1}$ (定理23④)

$=I^{-1}=I$

同理可證 $(A^{-1})(A^{-1})^{T}=I$, 故得證A^{-1}爲正交矩陣.

其餘部份讀者自證.

習題26b.1

試舉例說明兩個正交矩陣相加, 未必還是正交矩陣.

習題26b.1 (師大87資教[9])

Given $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$,

(a) Show that this is an orthogonal matrix. (5%)

(b) Find A^{-1}. (5%)

27 定義:《矩陣的跡》

對$n\times n$矩陣$A=[\ a_{ij}\ ]$，定義:

$$\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\ \dots\ +a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

稱爲A的跡(*trace*) .

【要訣】(1) 矩陣的跡就是它的主對角線元素的和.

習題27.1 (清大71資科[3])

設 $A=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\mathrm{tr}(AB)$ 及 $\mathrm{tr}(BA)$.

Ans: 都是59

28 定理:《跡的性質》

對方陣A, B, P, 及數k :

① 對$n\times n$矩陣A, B, 必$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$

② 對$n\times n$矩陣A, 及數k, 必$\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}A$.

③ 對$m\times n$矩陣A, $n\times m$矩陣B, 必$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

④ 對$n\times n$矩陣A, 及$n\times n$可逆矩陣P, 必$\mathrm{tr}(PAP^{-1})=\mathrm{tr}A$

⑤ 對$m\times n$矩陣A, 必 $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}A$.

⑥ 對$m\times n$矩陣A, 必 $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}})=\mathrm{tr}(\overline{A})=\overline{\mathrm{tr}\,A}$.

【要訣】(1) ①②合併為$\mathrm{tr}(hA+kB)=h\mathrm{tr}A+k\mathrm{tr}B$.

(2) $\mathrm{tr}(AB)$通常不等於$(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$.

(3) $\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(BCA)=\mathrm{tr}(CAB)$. (由③可證)

(4) $\mathrm{tr}(ABC)$通常不等於$\mathrm{tr}(ACB)$.

†【證】③(中央85統計甲[4])(大同83資工[1])(交大83統計[6](b))

令$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{kl}]_{n\times m}$, $AB=[c_{pq}]_{m\times m}$, $BA=[d_{rs}]_{n\times n}$

則$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{m} c_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ (定義4)

$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_{ji}$ (調整上式的求和順序)

$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n} d_{jj}=\mathrm{tr}(BA)$

④(交大88統計[2])(大同83資工[1])(交大82工工[7])

$\mathrm{tr}(PAP^{-1})=\mathrm{tr}((PA)P^{-1})=\mathrm{tr}(P^{-1}(PA))$ (由③)

$=\mathrm{tr}((P^{-1}P)A)=\mathrm{tr}(IA)=\mathrm{tr}A$

①⑤⑥讀者自證.

習題28.1 (大同82資工[二4])(台大80電機Z[8])(台大78資訊[3])

證明不可能有實數矩陣A, B使$AB-BA=I$ 成立. (提示:等號兩邊取tr).

習題28.2

舉例說明要訣(2).

習題28.3

① 證明要訣(3).

② 舉例說明要訣(4).

(提示: ②可取$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 再試$B$,$C$.)

習題28.4 (中央85統計乙[2]b)

設$n\times p$矩陣A使$(A^{\mathrm{T}}A)$可逆, 求 $\mathrm{tr}(A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}})$.

Ans: p .