4 行列式

概要與指引

行列式是線性代數的一種重要工具, 在階數不高時用起來尤其方便. 國內的學生在中學時期對行列式都已有相當多的經驗, 因此本書就不像一般英文書那樣從頭介紹.

第一節談到的是行列式的基本性質. 行列式的理論有許多不同的推演法 : 有的作者(如Burton)是用完全展開式下定義(定義4); 有的(如Hoffman)是用行列式的特徵性質(定理7 ②④⑥⑧)下定義, 再討論它的唯一性與存在性; 有的(如Noble)是用降階展開式(定理11)下定義. 這種現象使得行列式理論的邏輯次序變成沒有定論. 筆者認為:在線性代數上做太多邏輯遊戲只是徒增初學者的困擾, 而且使線性代數的主題相對減弱. 因此本書採取最接近中學經驗的講法, 並刪除許多不必要的形式證明. 對一般學生來說, 本節中該留意較新鮮的部份(定理6, 範例12).

第二節的重點是定理17. 在解方程式方面, 公式解Cramer's rule 的重要性已被高斯消去法取代. 我們也在這節討論行列式的塊狀運算技巧.

§1. 行列式的基本性質

1 定義:《排列》 // 定義n階行列式的工具

①令$X_n=\{1,2,...,n\}, n\geq 2$，由$X_n$到$X_n$的一對一且映成的函數稱爲$X_n$上的一個排列(*permutation*)(或譯爲重排).

②所有由X_n到X_n的排列所成的集合記爲$\mathcal{S}_n$,稱爲n個符號的對稱群(*symmetric group on n symbols*).

③設$\sigma\in\mathcal{S}_n$，我們可將σ記爲 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

④對排列$\sigma\in\mathcal{S}_n$. 若$i,j\in X_n$，滿足$i<j$且$\sigma(i)>\sigma(j)$，則稱(i,j)是σ的一個逆序(*inversion*).

⑤對排列σ, σ的正負號(*sign*)定義如下:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=\begin{cases} 1, & \text{的逆序總數爲偶數,} \\ -1, & \text{的逆序總數爲奇數.} \end{cases}$$

$\operatorname{sgn}(\sigma)=1$時稱σ爲偶排列; $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$時稱σ爲奇排列.

【要訣】(1)$\mathcal{S}_n$含有n！個元素，其中奇排列，偶排列各佔一半.

$$*(2)\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

(3)把$(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))$經過兩兩對調逐步換回成$(1,2,...,n)$所需的對調總數若爲偶數，則$\operatorname{sgn}\sigma=1$；若爲奇數，則$\operatorname{sgn}\sigma=-1$.
不同的對調法所需的對調總數可能不同，但奇偶性(parity)必相同.

2 範例:《求sgn的方法》

對 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathcal{S}_5$ ，求sgnσ .

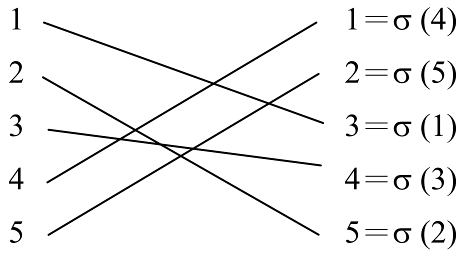
＊【解1】sgns $= \prod_{i<j} \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$

$$= \left(\frac{5-3}{2-1}\right)\left(\frac{4-3}{3-1}\right)\left(\frac{1-3}{4-1}\right)\left(\frac{2-3}{5-1}\right)\left(\frac{4-5}{3-2}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{1-5}{4-2}\right)\left(\frac{2-5}{5-2}\right)\left(\frac{1-4}{4-3}\right)\left(\frac{2-4}{5-3}\right)\left(\frac{2-1}{5-4}\right)$$

$= -1$. (以原形式約分)

【解2】由劃線法(不要讓三線共交點)



每個交點代表一個逆序.

可看出有下列逆序:

(1, 4), (2, 4), (3, 4), (2, 3), (1, 5), (3, 5), (2, 5)共七組.

∴ sgnσ＝–1

【解3】(推薦採用此法)

由對調法:

3	5	4	<u>1</u>	2
1	5	4	3	<u>2</u>
1	2	4	<u>3</u>	5
1	2	3	4	5

共經三次對調,

∴ sgnσ ＝ –1 (讀者可自行嘗試其他對調方式).

習題2.1

對下列各排列求其正負符號:

(a) $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$ (b) $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&4&1&6&5\end{pmatrix}$

(c) $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$

Ans: (a)1 (b) –1 (c) –1

習題2.2 (交大87資科[6])

How many inversions of the sequence 1,3,4,7,8,2,6,9,5 are there ?

Ans: 共有10組逆序: (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (4,9), (4,7), (7,9), (5,7), (5,9), (8,9)

3 範例:《計算sgn》

寫出$\mathcal{S}_3$內的所有排列, 並求其正負符號.

【解】列表如下:

(σ(1), σ(2), σ(3))			sgn σ
1	2	3	1
1	3	2	–1
2	1	3	–1
2	3	1	1
3	1	2	1
3	2	1	–1

習題3.1

寫出$\mathcal{S}_4$內的所有排列, 並求其正負符號.

4 定義:《行列式》

①對於n階方陣$A=[\,a_{ij}\,]$, 定義A的行列式(*determinant*)如下:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

②對 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ a_{nn} \end{bmatrix}$,

定義 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

③對 $\boldsymbol{a}_1 = [\, a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \,], \boldsymbol{a}_2 = [\, a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \,], \ldots, \boldsymbol{a}_n = [\, a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \,]$,

定義 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

【要訣】(1) $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

(2)對n階實數方陣而言, det是“單矩陣變數的實數值函數”, 即

$$\det: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(3)對n個行向量而言, det是“n向量變數的實數值函數”, 即

$$\det: \underbrace{\mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n\times 1}}_{n\text{重直積}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(4)對n個列向量而言, det是“n向量變數的實數值函數”, 即

$$\det:\underbrace{\mathbb{R}^{1\times n}\times\mathbb{R}^{1\times n}\times\ldots\times\mathbb{R}^{1\times n}}_{n\text{重直積}}\longrightarrow\mathbb{R}$$

(5)$\mathbb{R}$換成其他數系仍相同.

(6)

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

但 $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

不能寫成 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{24}a_{42}a_{31}+a_{14}a_{43}a_{32}a_{21}$
$-a_{11}a_{42}a_{33}a_{24}-a_{2}a_{21}a_{43}a_{34}-a_{13}a_{32}a_{31}a_{44}-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

(應該有4!=24項，而且上式中有許多項的正負號也不對). 4階以上的行列式通常用降階法或高斯消去法計算.

(7) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$是4個數，但 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$只是一個數.

(8)行列式的任何一項所含的n個因子，恰好每列分配一個，而且每行分配一個.

習題4.1

試依照定義4驗證要訣(6).

4 a 定理:《對角行列式, 三角行列式》

① $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$$

② $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$$

【證】①爲②的特例.

②上三角矩陣 $[a_{ij}]$ 滿足條件 “ $i>j \implies a_{ij}=0$ ”

對各個$\sigma\in\mathcal{S}_n$所產生的項 $a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$來說,

這個乘積只有在每個因子都合於$i\le\sigma(i)$才會不等於0.

爲使乘積不爲0, 首先必須$\sigma(n)=n$, 又因σ爲一對一, $\sigma(n-1)$不能再取爲n, 所以只能取$\sigma(n-1)=n-1$. 接下來因σ爲一對一, $\sigma(n-2)$不能再取爲n或$n-1$, 所以只能取$\sigma(n-2)=n-2$. 依此類推得知每個i都必須$i=\sigma(i)$.

(前述解說是爲使觀念清楚. 若要嚴密證明, 可對n做數學歸納法)

這就是說由$\sigma\in\mathcal{S}_n$所產生的項只剩下每個i都使$i=\sigma(i)$的那一項.

這一項的σ是偶排列, 正負號取1, 所以$\det[a_{ij}]=a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$.

5 定理:《行列式轉置定理, 行列式共軛定理》

① 對方陣A, $\det(A^T)=\det A$

② 對複數方陣A, $\det(\overline{A})=\overline{\det A}$, ③ 對複數方陣A, $\det(A^H)=\overline{\det A}$.

【實例】 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & o \\ d & h & l & p \end{vmatrix}$

$$\det\left(\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}\right)=\det\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}=\bar{a}\,\bar{d}-\bar{b}\,\bar{c}=\overline{ad-bc}=\overline{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

【要訣】(1)行列式作轉置，其值不變.

(2)由此定理得知，任何有關行列式的列的定理，必有一個有關行的定理與其對應. 至少配上定理4a得知下三角矩陣的行列式爲主對角線的乘積.

【證】＊①令$A=[a_{pq}]$, $A^T=[b_{ij}]$，即$b_{ij}=a_{ji}$

對任意$\sigma\in\mathcal{S}_n$

$b_{1\sigma(1)}\,b_{2\sigma(2)}\ldots b_{n\sigma(n)}$經調整因子順序，可改寫爲 $b_{\sigma^{-1}(1)1}b_{\sigma^{-1}(2)2}\ldots b_{\sigma^{-1}(n)n}$

(例如$b_{14}b_{25}b_{31}b_{43}b_{52}$可調整爲$b_{31}b_{52}b_{43}b_{14}b_{25}$)

此外， $\operatorname{sgn}\sigma=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

$$\begin{aligned}\therefore\det(A^T) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\sigma)b_{1\sigma(1)}\ldots b_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})\,b_{\sigma^{-1}(1)1}\ldots b_{\sigma^{-1}(n)n}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})\,a_{1\sigma^{-1}(1)}\ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}\\ &= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_n}(\operatorname{sgn}\pi)\,a_{1\pi(1)}\ldots a_{n\pi(n)} \qquad \text{(將上式的}\sigma^{-1}\text{記爲}\pi\text{)}\\ &= \det A\end{aligned}$$

② $\det(\bar{A})=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\,\overline{a_{1\sigma(1)}}\ \ldots\overline{a_{n\sigma(n)}} = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\,\overline{a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}}$

$$= \overline{\sum_{\sigma}(\mathrm{sgn}\quad)\, a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det A}\ .$$

③由①②即得.

◎ **6** 定理:《行列式乘法定理》

對n階方陣A, B, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

【證】略. (本定理因各書對行列式的定義方式不同而有完全不同的證法).

習題6.1

對$n=2$的情形驗證本定理:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

習題6.2

①證明: $\det(AA^{T}) = (\det A)^2$.

②設A爲正交矩陣, 求證$\det A = \pm 1$. (交大80資工[1(f)])

6a 定理:《行列式乘法定理的推論》

① 若n階方陣A可逆, 則$\det A \neq 0$, 且$\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

② 對n階方陣A, B, 必$\det(AB) = \det(BA)$.

③ 對n階方陣A, P, 若P可逆, 則$\det(PAP^{-1}) = \det A$.

【要訣】(1)雖通常$AB \neq BA$, 但$\det(AB) = \det(BA)$必成立.

(2) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$也對, 但通常$\mathrm{tr}(AB) \neq (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$.

【證】① $\because$ $AA^{-1} = I$,

$\therefore$ $\det(A)\det(A^{-1}) = \det I = 1$ (由定理6)

$\therefore$ $\det A \neq 0$, 上式兩邊除以$\det A$即得證.

② $\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A = \det(BA)$.

③ 留作習題.

習題6a.1

證明並比較下列兩題之不同證法:

① $\det(ABA^{-1}) = \det B$, ② $\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}B$.

習題6a.2 (清大86資料[10](a))

Evaluate the determinant of A^{-1} where $A = BCD$, and

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ans: –1/10

7 定理:《行列式的基本運算性質》

對n階方陣A ,

① A中任兩列(行)對調, 則行列式的值變號.

② 將A中任一列(行)遍乘k, 則行列式的值爲原值的k倍 《homogenity》

③ 將A中第i列(行)的k倍加入第j列(行), ($j \neq i$), 則行列式的值不變.

④ 任一列(行)拆成兩個列(行)向量的和後, 可把原行列式拆成兩個行列式 《additivity》

⑤ 若某列(行)全爲0, 則行列式的值爲0.

⑥ 若有二列(行)相等, 則行列式的值爲0 《alternating》

⑦ 若有二列(行)成比例, 則此行列式的值爲0.

⑧ 單位矩陣的行列式爲1.

⑨ $\det(kA) = k^n \det A$ (注意: 本公式右邊不是 $k\det A$)

⑩ $\det(-A) = (-1)^n \det A$ (注意: 本公式右邊不是 $-\det A$)

【實例】

① $-\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

② $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bk & c \\ d & ek & f \\ g & hk & i \end{vmatrix}$.

③ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kg & b+kh & c+ki \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+ck & c \\ d & e+fk & f \\ g & h+ik & i \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

⑤ $\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

⑥ $\begin{vmatrix} a & e & a & i \\ b & f & b & j \\ c & g & c & k \\ d & h & d & l \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0$

⑦ $\begin{vmatrix} a & ka & d \\ b & kb & e \\ c & kc & f \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 0\,.$

【要訣】(1)三種列運算對矩陣作用，都是列等價. 以此三種列運算對行列式施行時，對調要變號，列乘常數會使行列式值變k倍，加入型則不變，即

$\det(r_{ij}(A)) = -\det A$ .... ①

$\det(r_i^{(k)}(A)) = k\det A$ .... ②

$\det(r_{ij}^{(k)}(A)) = \det A$ .... ③

行列式的計算常利用列運算及行運算進行.

(2)②,④合併使行列式函數det對任何一列來看都形成線性映射. 這稱爲n-linear. 但整個det並非線性映射.

(3)各性質之間有簡單的推導關係如下:

②+⑥ ⟹ ⑦

② ⟹ ⑤

③+⑤ ⟹ ⑥

① ⟹ ⑥

①+④+⑦ ⟹ ③

⑥+④ ⟹ ①

②+③ ⟹ ①

(4)(5)改編爲⑨⑩

(6)通常$\det(A+B) \neq \det A + \det B$ (交大80資工[1b])

(7)有的書(如Hoffman)將行列式定義爲滿足本定理②,④,⑥,⑧的矩陣函數.

【證】略.

† 習題7.1

試依要訣(3)練習各性質之間的推導.

習題7.2

利用④展開 $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix}$

$$\text{Ans: } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

習題7.3 (師大84資教[4])

對3×3矩陣A,B, 已知det$A=4$, det$B=5$, 求det$(2AB)$.

Ans: 160.

習題7.4 (交大84資科[2])

設座標平面上的三條直線$a_1x+b_1y=c_1$, $a_2x+b_2y=c_2$, $a_3x+b_3y=c_3$ 都通過某個點(p, q). 求證 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

(編註: 將第三行表成前兩行的線性組合.)

習題7.5 (元智80工工[2])

Let A, B be two $n\times n$ matrices. If n is odd and $AB=-BA$, prove that either A or B is not invertible. (編註: 本題須引用定理17)

8 範例:《行列式基本性質的應用》

化簡 $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$.

【解】原式 (第二,三行加入第一行)

$$=\begin{vmatrix} (a-b)+(b-c)+(c-a) & b-c & c-a \\ (b-c)+(c-a)+(a-b) & c-a & a-b \\ (c-a)+(a-b)+(b-c) & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

習題8.1

設ω爲1的立方虛根，求證 $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$

習題8.2

求證: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

習題8.3

求證: $\begin{vmatrix} a & b & c & d+e \\ a & c & d & e+b \\ a & d & e & b+c \\ a & e & b & c+d \end{vmatrix} = 0$

9 範例:《行列式基本性質的應用》

① 化簡 $\begin{vmatrix} x+b & b & b & b \\ b & x+b & b & b \\ b & b & x+b & b \\ b & b & b & x+b \end{vmatrix}$.

② 設$v=[b_1\ b_2\ \dots\ b_n]^T$, $l=[1\ \ 1\ \ \dots\ 1]^T$, x爲實數, 求證
$\det(xI+v\,l^T) = x^{n-1}(x+b_1+b_2+\dots+b_n)$.

③ 設 $l=[1\ \ 1\ \ \dots\ 1]^T$, x, b爲實數, 求證 $\det(xI+b\,l\,l^T)=x^{n-1}(x+nb)$.

【解】① 原式

$$=\begin{vmatrix} x+4b & x+4b & x+4b & x+4b \\ b & x+b & b & b \\ b & b & x+b & b \\ b & b & b & x+b \end{vmatrix} \qquad \text{(各列加入第一)}$$

$$=(x+4b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & x+b & b & b \\ b & b & x+b & b \\ b & b & b & x+b \end{vmatrix} \qquad \text{(提出公因式)}$$

$$=(x+4b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \qquad \text{(各列加入第一列的}-b\text{倍)}$$

$$=(x+4b)x^3$$

② 讀者倣①之法自證. (若有困難就先對n=4試作)

③ 此爲②之特例, 取$v=b\,l$ 即得.

習題9.1 (交大81統計[5]20%)

設$c=(c_1, c_2, ..., c_n)^t\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, I爲單位矩陣, $l=(1, 1, ..., 1)^t$, $J=[\,a_{ij}\,]_{n\times n}$, $a_{ij}=1$.

① $\det(\lambda I+lc^t)$=? ② $\det(aI+bJ)$=? $a,b\in\mathbb{R}$.

習題9.2

化簡 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2-x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3-x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4-x \end{vmatrix}$ Ans: $(x-10)x^3$

習題9.3

$$f(n)=\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & & n \\ n+1 & n+2 & & 2n \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \\ n(n-1)+1 & n(n-1)+2 & \dots\dots\dots\dots & n^2 \end{bmatrix}.$$

Find $f(n)$ for $n=1, 2, 3, \ldots$.

Ans : 1, –2, 0, 0, 0, ...

9a 範例:《行列式基本性質的應用》

化簡 $\begin{vmatrix} a^2 & bc & c^2+ca \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$

【解】原式(各行提公因式)

$$=abc\begin{vmatrix} a & c & c+a \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (1) \end{array} =abc\begin{vmatrix} a & c & c+a \\ a+b & b & a \\ 2a+2b & 2b+2c & 2c+2a \end{vmatrix}$$

$$=2abc\begin{vmatrix} a & c & c+a \\ a+b & b & a \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array} =2abc\begin{vmatrix} -b & -b & 0 \\ 0 & -c & -c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$=2ab^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} =2ab^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+b & -2a & c+a \end{vmatrix}$$

(-1) (-1)

$$=4a^2b^2c^2$$

習題9a.1

化簡 $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$ Ans: $4abc$

習題9a.2

化簡 $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c-a \\ b & b^2 & c+a-b \\ c & c^2 & a+b-c \end{vmatrix}$ Ans:$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

＊ 習題9a.3

化簡 $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ Ans: $4(a+b)(b+c)(c+a)$

10 定義:《餘因式》

給定n階方陣$A=[a_{ij}]$, $n>1$.

①設A_{pq}爲刪除A中之第p列與第q行所得的$n-1$階方陣, 則稱A_{pq}爲A的一個子矩陣(*minor matrix*, 或 *submatrix*) .

②定義: $\mathrm{cof}_{pq}(A)=(-1)^{p+q}\det(A_{pq})$, 稱爲A的第(p,q)位餘因式(cofactor).

【要訣】餘因式所配之正負號可依下圖決定.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \\ & \cdots\cdots & & \end{bmatrix}$$

習題10.1

令$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 求 ① $\operatorname{cof}_{11}A$, ②$\operatorname{cof}_{32}A$

Ans: ① –7, ②–12.

11 定理:《降階展開式》

設A爲n階方陣

① $\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{pj}\operatorname{cof}_{pj}A$; $p=1,2,\ldots,n.$ 《 第p列降階展開式 》

② $\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{iq}\operatorname{cof}_{iq}A$; $q=1,2,\ldots,n.$ 《 第q行降階展開式 》

③ $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\operatorname{cof}_{pj}A=0;\quad k\neq p$.

④ $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\operatorname{cof}_{iq}A=0;\quad k\neq q$.

【實例】(1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}+b\left(-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right)+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$=d\left(-\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}\right)+e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}+f\left(-\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}\right)$$

$$=g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}+h\left(-\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}\right)+i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$(2)\ d\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + e\left(-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}\right) + f\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

【要訣】(1) 本定理可濃縮成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\ \mathrm{cof}_{pj} A = \delta_{kp}\det A\ ;\quad k,p=1, \ldots, n\ .$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\ \mathrm{cof}_{iq} A = \delta_{kq}\det A\ ;\quad k,q=1, \ldots, n\ .$$

(2) 展開式中配對正確時得到det$A$, 配另一列(行)時變成0.

(3) 有的書(如Noble & Daniel)以本定理①定義行列式.

＊【證】①②略

③將方陣A的第p列視爲變數, 而其它都視爲常數. 則①成爲$a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}$的恆等式. 將此$n$個變數以$a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$代入, 則行列式的第$p$列與第$k$列相同, 因此行列式爲0.

④讀者仿③自證.

12 範例:《高階行列式求值》

計算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

【要訣】計算高階行列式, 要靈活運用行運算, 列運算及降階展開法.

【解1】原式第一行展開得

$$3\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 0$$

$= \ ......$ (此法可行，但效率差)

【解2】 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (2) \quad (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 7 & -2 \\ 12 & -5 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ (依上式第一行展開)

$= -2 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 7 & -2 \\ 12 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -11 & -4 & 20 \\ 12 & 7 & -17 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(1)
(-2)

$= (-2) \begin{vmatrix} -4 & 20 \\ 7 & -17 \end{vmatrix}$ (依上式第三列展開)

$= (-2)(4) \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -17 \end{vmatrix} = (-8)(-18) = 144 \ .$

習題12.1

求A的行列式，$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Ans: 128

習題12.2

計算 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ Ans: 232

習題12.3 (清大80資科[5])

化簡 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

(提示: 各列都加入第一列後提出因式)

Ans:$(-\lambda)^5\,(6-\lambda)$

習題12.4

求det $[\,1-\delta_{ij}\,]_{n\times n}$ (δ_{ij}的定義見CH2定義10)

(提示: 各列都加入第一列, 若覺得太難可先對n=3試解)

Ans:$(-1)^n(1-n)$

∗**12a**定理:《交叉降階公式》

對n階方陣$A=[\,a_{ij}\,]$，若$a_{pq}\neq 0$，令 $b_{ij}=\begin{cases} a_{ij}\,a_{pq}-a_{iq}\,a_{pj}, & i\neq p\text{且 } j\neq q \\ \text{隨意}, & i=p\text{或 } j=q. \end{cases}$

將$n\times n$矩陣$B=[\,b_{ij}]$, 刪除第p列與第q行, 得到n–1階方陣B_{pq},

則 $\det A=(-1)^{p+q}\,a_{pq}{}^{-(n-2)}\det(B_{pq})$.

【要訣】使用本定理在計算上的難度與範例12的方法相同，但利用範例12較靈活.

【實例】

設$A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ p & q & r & s \end{bmatrix}$,

若$a\neq 0$，則 $\det A=\dfrac{1}{a^2}\begin{vmatrix} af-be & ag-ce & ah-de \\ aj-bi & ak-ci & al-di \\ aq-bp & ar-cp & as-dp \end{vmatrix}$

若$g\neq 0$，則 $\det A=\dfrac{-1}{g^2}\begin{vmatrix} ag-ce & bg-cf & dg-ch \\ ig-ke & jg-kf & lg-kh \\ pg-re & qg-rf & sg-rh \end{vmatrix}$

【證】爲求清晰，在此僅以$n=4$，對$(p,q)=(2,3)$ 加以證明. 一般情形讀者自證.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ p & q & r & s \end{vmatrix}=\frac{1}{g^3}\begin{vmatrix} ag & bg & cg & dg \\ e & f & g & h \\ ig & jg & kg & lg \\ pg & qg & rg & sg \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{g^3}\begin{vmatrix} ag-ce & bg-cf & 0 & dg-ch \\ e & f & g & h \\ ig-ke & jg-kf & 0 & lg-kh \\ pg-re & qg-rf & 0 & sg-rh \end{vmatrix}=\frac{-1}{g^2}\begin{vmatrix} ag-ce & bg-cf & dg-ch \\ ig-ke & jg-kf & lg-kh \\ pg-re & qg-rf & sg-rh \end{vmatrix}$$

§2. 行列式的特殊技巧

†13 範例:《不定階三線行列式》

若n階方陣 $A_n=[\,a_{ij}\,]$, 其中

$$a_{ij}=\begin{cases} p & ;\ i=j+1, \\ q & ;\ i=j, \\ r & ;\ i=j-1, \\ 0 & ;\ \text{其它} \end{cases}$$

證明

①$\det A_1=q$, $\det A_2=q^2-pr$. $\det A_3=q^3-2pqr$.

②對$n\geq 3$: $\det(A_n)=q\det(A_{n-1})-pr\det(A_{n-2})$

【要訣】(1) 非零值集中在主對角線附近的矩陣稱為帶狀矩陣(*band matrix*)
在主對角線, 上對角線, 下對角線才有非零項的矩陣稱為三線矩陣(*tridiagonal matrix*)

(2) 三線矩陣的不定階行列式通常是用離散數學的"遞迴關係"求解.
若要用純線代的方法請參閱CH16範例13.

【解】

$$\det A_1=\det[\,q\,]=q\ ,\quad \det A_2=\det\begin{bmatrix} q & r \\ p & q \end{bmatrix}=q^2-pr\ .$$

對$n\geq 3$: $\det(A_n)=$

$$\det\begin{bmatrix} q & r & & & \\ p & q & r & & \\ & p & q & r & \\ & & p & q & \\ & & & \cdots\cdots & \\ & & & & \end{bmatrix}_{n\text{階}}$$

(對第一列降階展開)

$$= q\cdot\det(A_{n-1}) - r\cdot\det\begin{bmatrix} p & r & & & \\ 0 & q & r & & \\ & p & q & r & \\ & & p & q & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & & \end{bmatrix}_{n-1\text{階}}$$

(對第一行降階展開)

$= q\det(A_{n-1}) - pr\det(A_{n-2})$

習題13.1 (清大86資科[7]10%)

Find $\det(A_n)$ if $A_n = [\, a_{ij}\,]$, where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \; i=j \;\text{ or }\; i=j+1, \\ -1 & \text{if } \; i=j-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Ans: $\det(A_n) = \det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2})$, $\det(A_1) = 1$, $\det(A_2) = 2$.

依離散數學的方法解此recursive relation可得

$$\det(A_n)=(1/\sqrt{5})\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

習題13.2 (清大85資科[3]10%)

設$D_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$定義爲

$$D_n(i,j)=\begin{cases}2, & \text{if } i=j,\\ -1, & \text{if } |i-j|=1,\\ 0, & \text{elsewhere.}\end{cases}$$

(a) 寫出 D_4?

(b) 證明 $\det(D_n)=2\det(D_{n-1})-\det(D_{n-2})$ for $n\ge 3$.

(c) 求D_{100}的行列式

Ans: $\det(D_n)=1+n$. $\det(D_{100})=101$. #

習題13.3: (元智84工工X[1])(北科88電通[2])

$$\text{令 } A_{n\times n}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0 \;.....\; 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \;.....\; 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \;.....\; 0 & 0 & 0\\ . & . & . & . & .....\; . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \;.....\; 0 & 1 & 2\end{bmatrix}_{n\times n}$$

求證$A_{n\times n}$的行列式值是$n+1$.

(編註: 本題已有公式, 所以不必解遞迴式. 用數學歸納法證就可以了.)

＊習題13.4

對$n\times 1$向量a, b, 求$\det(xI+ab^T)$. (提示: 拆成兩項再設法降階)

Ans: $x^{n-1}(x-b^Ta)$

14 定理:《Vandermonde行列式》

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & \cdots\cdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)\ .$$

† 【證】(中正79資工[3])

為使觀念清楚，以n=4為例證明如下: (一般情形用數學歸納法證明)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 & x_2^3 - x_2^2x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_4x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix}$$

$(-x_1)$

$(-x_1)$

$(-x_1)$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 & x_2^3 - x_2^2x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_4x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

(依歸納法操作，再繼續降階:)

$$= [(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)]\,[(x_3-x_2)(x_4-x_2)] \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= [(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)]\,[(x_3-x_2)(x_4-x_2)]\,[x_4-x_3]$$

習題14.1

計算 $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 & 6^4 \end{bmatrix}$

Ans: 288

習題14.2

證明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots\ldots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots\ldots & 3^{n-1} \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix} = (1!)(2!)(3!)\ldots[(n-1)!]$

習題14.3

化簡 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ (提示: 先找公因式)

Ans: $abc(a-b)(b-c)(c-a)$

† 習題14.4

化簡① $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} 1 & x & x^4 \\ 1 & y & y^4 \\ 1 & z & z^4 \end{vmatrix}$

Ans: ① $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

② $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

③ $(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

† **14a**範例:《Vandermonde行列式的變形》

① 證明 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b+c+d & bc+cd+db & bcd \\ 1 & c+d+a & cd+da+ac & cda \\ 1 & d+a+b & da+ab+bd & dab \\ 1 & a+b+c & ab+bc+ca & abc \end{vmatrix}$

② 證明 $\left(\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}\right)^2$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a+b+c+d & a^2+b^2+c^2+d^2 & a^3+b^3+c^3+d^3 \\ a+b+c+d & a^2+b^2+c^2+d^2 & a^3+b^3+c^3+d^3 & a^4+b^4+c^4+d^4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 & a^3+b^3+c^3+d^3 & a^4+b^4+c^4+d^4 & a^5+b^5+c^5+d^5 \\ a^3+b^3+c^3+d^3 & a^4+b^4+c^4+d^4 & a^5+b^5+c^5+d^5 & a^6+b^6+c^6+d^6 \end{vmatrix}$$

【解】① (右式第1行乘$(-a-b-c-d)$加入第二行:)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -a & bc+cd+bd & bcd \\ 1 & -b & cd+da+ac & cda \\ 1 & -c & da+ab+bd & dab \\ 1 & -d & ab+bc+ca & abc \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow(a) \\ \leftarrow(b) \\ \leftarrow(c) \\ \leftarrow(d) \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a & -a^2 & abc+acd+abd & abcd \\ b & -b^2 & bcd+bda+bac & bcda \\ c & -c^2 & cda+cab+cbd & cdab \\ d & -d^2 & dab+dbc+dca & dabc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & -a^2 & abc+acd+abd & 1 \\ b & -b^2 & bcd+bda+bac & 1 \\ c & -c^2 & cda+cab+cbd & 1 \\ d & -d^2 & dab+dbc+dca & 1 \end{vmatrix}$$

(以上式的第四行的 $-(abc+bcd+cda+dab)$倍加入第三行:)

$$= \begin{vmatrix} a & -a^2 & -bcd & 1 \\ b & -b^2 & -cda & 1 \\ c & -c^2 & -dab & 1 \\ d & -d^2 & -abc & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (a) \\ \leftarrow (b) \\ \leftarrow (c) \\ \leftarrow (d) \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a^2 & -a^3 & -abcd & a \\ b^2 & -b^3 & -bcda & b \\ c^2 & -c^3 & -cdab & c \\ d^2 & -d^3 & -dabc & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & -a^3 & -1 & a \\ b^2 & -b^3 & -1 & b \\ c^2 & -c^3 & -1 & c \\ d^2 & -d^3 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

#

② 原式

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \quad \text{(行列式轉置定理)}$$

再依行列式乘法定理乘開即得.

† 習題14a.1

證明 $\begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \\ 1 & a+b & ab \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

† 習題14a.2

對 $s_p = \sum_{i=1}^{5} x_i^p$，求證 $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 5} (x_j - x_i)^2$

† **14b** 定理:《微分型Vandermonde行列式》

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \cdots & (2n-1)x_1^{2n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & \cdots & (2n-1)x_2^{2n-2} \\ & & \cdots\cdots & & & \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2x_n & 3x_n^2 & \cdots & (2n-1)x_n^{2n-2} \end{vmatrix}_{(2n\times 2n)} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)^4$$

＊ 【證】爲使觀念清楚，以n＝3爲例證明如下: (一般情形以數學歸納法證明)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 & 5x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 & 5x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & x_3^5 \\ 0 & 1 & 2x_3 & 3x_3^2 & 4x_3^3 & 5x_3^4 \end{vmatrix}$$

(以倒數第2行的$-x_1$倍加入倒數第1行, 再以倒數第3行的$-x_1$倍加入倒數第2行, ... ，如定理14)

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\
1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & x_2^3-x_2^2x_1 & x_2^4-x_2^3x_1 & x_2^5-x_2^4x_1 \\
0 & 1 & 2x_2-x_1 & 3x_2^2-2x_2x_1 & 4x_2^3-3x_2^2x_1 & 5x_2^4-4x_2^3x_1 \\
1 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1x_3 & x_3^3-x_3^2x_1 & x_3^4-x_3^3x_1 & x_3^5-x_3^4x_1 \\
0 & 1 & 2x_3-x_1 & 3x_3^2-2x_3x_1 & 4x_3^3-3x_3^2x_1 & 5x_3^4-4x_3^3x_1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\
x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & x_2^3-x_2^2x_1 & x_2^4-x_2^3x_1 & x_2^5-x_2^4x_1 \\
1 & 2x_2-x_1 & 3x_2^2-2x_2x_1 & 4x_2^3-3x_2^2x_1 & 5x_2^4-4x_2^3x_1 \\
x_3-x_1 & x_3^2-x_1x_3 & x_3^3-x_3^2x_1 & x_3^4-x_3^3x_1 & x_3^5-x_3^4x_1 \\
1 & 2x_3-x_1 & 3x_3^2-2x_3x_1 & 4x_3^3-3x_3^2x_1 & 5x_3^4-4x_3^3x_1
\end{vmatrix}
$$

$$
=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{array}{c}
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\
1 & 2x_2-x_1 & 3x_2^2-2x_2x_1 & 4x_2^3-2x_2^2x_1 & 5x_2^4-4x_2^3x_1 \\
1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\
1 & 2x_3-x_1 & 3x_3^2-2x_3x_1 & 4x_3^3-2x_3^2x_1 & 5x_3^4-4x_3^3x_1
\end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ (-1) \\ \\ (-1) \\ \\
\end{array}
$$

$$
=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\
0 & x_2-x_1 & 2x_2^2-2x_2x_1 & 3x_2^3-3x_2^2x_1 & 4x_2^4-4x_2^3x_1 \\
1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\
0 & x_3-x_1 & 2x_3^2-2x_3x_1 & 3x_3^3-3x_3^2x_1 & 4x_3^4-4x_3^3x_1
\end{vmatrix}
$$

$$= (x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 0 & 1 & 2x_3 & 3x_3^2 & 4x_3^3 \end{vmatrix}$$

(以倒數第2行的$-x_1$倍加入倒數第1行, 再以倒數第3行的$-x_1$倍加入倒數第2行, ... ，如定理14) (降階) (提因式)

$$= (x_2-x_1)^3(x_3-x_1)^3 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & 2x_2-x_1 & 3x_2^2-2x_2x_1 & 4x_2^3-3x_2^2x_1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & 2x_3-x_1 & 3x_3^2-2x_3x_1 & 4x_3^3-3x_3^2x_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow \\ (-1) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

(各奇數行以-1倍加入下一行) (提因式)

$$= (x_2-x_1)^4(x_3-x_1)^4 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 0 & 1 & 2x_3 & 3x_3^2 \end{vmatrix}$$

(*** 依數學歸納法操作 ***)

$$= (x_2-x_1)^4(x_3-x_1)^4(x_3-x_2)^4 \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)^4(x_3-x_1)^4(x_3-x_2)^4$$

16 定義:《古典伴隨矩陣》

對n階方陣 $A=[a_{ij}]$ 令$\alpha_{ij}=\mathrm{cof}_{ji}\,A$ ($=(-1)^{i+j}\det A_{ji}$)

則稱方陣$[\alpha_{ij}]$為A的古典伴隨矩陣(classical adjoint), 記為adj$A$.

【要訣】(1) 古典伴隨矩陣是求A^{-1}的橋樑. 注意ij與ji.

(2) $\mathrm{adj}(kA) = k^{n-1}\mathrm{adj}A$.

(3) $\mathrm{adj}(A^{T}) = (\mathrm{adj}A)^{T}$.

(4) $\mathrm{adj}(O)=O$.

【實例】

若$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 則$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} \mathrm{cof}_{11}A & \mathrm{cof}_{21}A & \mathrm{cof}_{31}A \\ \mathrm{cof}_{12}A & \mathrm{cof}_{22}A & \mathrm{cof}_{32}A \\ \mathrm{cof}_{13}A & \mathrm{cof}_{23}A & \mathrm{cof}_{33}A \end{bmatrix}$

習題16.1 (交大85資料[11]) [填充題]

(1) $n*n$矩陣A, 問$A \cdot \mathrm{adj}A = ?$ (2%)

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 問$\mathrm{adj}A = ?$ (1%)

Ans: (2) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

#

17 定理:《矩陣可逆性的行列式判別法》

設$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 則

① $A(\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A)A = (\det A)I_n$

◎ ② A可逆 $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

此時 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{adj}A$ 《逆矩陣公式》

【要訣】(1) A不可逆 $\Longleftrightarrow$ $\det A = 0$.

(2) A可逆 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{adj}A$可逆 .

(3) 利用逆矩陣公式求A^{-1}之三步驟:求各餘因式,取轉置,除以行列式.
此公式看來外表漂亮，但在計算上並不實用.

(4) $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(5) $\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1}$. (交大80資工[1(e)])

† (6) 若A可逆，則 $\mathrm{adj}A = (\det A)A^{-1}$,

† (7) 若A可逆，則 $\mathrm{adj}(A^{-1}) = (\det A)^{-1}A$,

† (8) 若A可逆，則 $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$.

∗(9) 定理17②在$\mathbb{Z}^{n\times n}$上不成立. 因爲在$\det A \neq \pm 1$時, $A^{-1} \notin \mathbb{Z}^{n\times n}$.
因此A在$\mathbb{Z}^{n\times n}$中不算是可逆.

【證】①令$A = [a_{ij}]$, $\mathrm{adj}A = [\alpha_{jk}]$, $A(\mathrm{adj}A) = [c_{ik}]$

則$c_{ik} = \sum_j \alpha_{ij}\alpha_{jk} = \sum_j a_{ij}\mathrm{cof}_{kj}A = \delta_{ik}\det A$ (定理11③)

$\therefore [c_{ik}] = (\det A)I_n$

同理可證： $(\mathrm{adj}A)A = (\det A)I_n$

②(中央83資工[1])

[$\Longrightarrow$]見定理6a之證明

[$\Longleftarrow$]若$\det A \neq 0$, 由①可得

$$A\left(\frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A\right)A = I_n$$

$$\therefore A\text{可逆，且}A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A\ .$$

習題17.1

試證要訣(3). (hint: 定理17①, 定理6, 要訣(2))

習題17.2

試依古典伴隨矩陣的方法, 求A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Ans: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

習題17.3 [是非論證題](中央86資工[1]fg)

(f) A is invertible if and only if A^3 is invertible.

(g) $A^3=O$ if and only if $\det A=0$.

Ans: (f) True, (g) False.

18 定理:《Cramer's rule》

若聯立方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的係數矩陣行列式不為0, 則此方程組恰有一解. 公式如下:

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{cof}_{kj} A = \frac{1}{\det A}\,[A\text{的第}j\text{行被}b\text{取代所形成的行列式}],$$

$j=1,2,\ldots,n$.

【要訣】(1)用Cramer法則解方程組有下列限制:

(a)等號個數必須與未知數個數相等.

(b)係數矩陣行列式必須不為0, 一旦為0, 就無法使用.

(c)在變數超過3以後, 各行列式很不好算, 反而不實用.

(2)在二元方程式, 一眼就可看出係數行列式是否為零, 若不為零, 使用Cramer法則非常方便. $n\geq 3$就應使用高斯消去法.

【實例】(1) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ 之公式解爲

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

(2) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$ 之公式解爲 $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}.$

其中 $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

【證】(中央86資工[3])

令 $A=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $\operatorname{adj}A=[\alpha_{jk}]$, 則

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{\det A}[\alpha_{jk}]\,[b_k] \qquad \text{(定理17)}$$

$$\therefore\ x_j=\frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}b_k=\frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{cof}_{kj}A$$

將 [A的第j行被b取代所形成的行列式] 由第j行展開就剛好是上式的分子部份. (定理11)

† 習題18.1 (改編為範例18b)

18a 範例:《Cramer's rule的套用》

Use Cramer's rule to solve the following system of linear equations;

$$3x+2y+4z=1 \quad ,$$
$$2x-y+z=0 \quad ,$$
$$x+2y+3z=1 \quad .$$

(no credit without using Cramer's rule).

【解】$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-5\neq 0$, 所以有唯一解,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta},\ y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta},\ z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

得出$x=-1/5$, $y=0$, $z=2/5$.

習題18a.1

用Cramer's rule解 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$.

Ans: $x_1=1/3$, $x_2=1/3$, $x_3=0$

習題18a.2 (中原86工工[2])

Solve the following equations using determinants:

$3y+2x=z+1$

$3x+2z=8-5y$

$3z-1=x-2y$

Ans: $x=3, y=-1, z=2$ #

習題18a.3

用Cramer's rule解 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2+2x_4=0 \\ x_2-6x_3-x_4=5 \\ 3x_1+x_2+x_4=1 \end{cases}$

Ans: $x_1=-2, x_2=10, x_3=4/3, x_4=-3$.

18b 定理:《Cramer's rule的應用--多項式的標定》(清大83統計[1])(台大76資工丙[2])(中央89資工[3])

對給定的相異實數$x_1, x_2, \ldots, x_n$, 及任意實數$y_1, y_2, \ldots, y_n$,
必存在唯一的$n-1$次以內的多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x_i)=y_i$, $1\le i\le n$.

【證】令 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$, 將所要求的條件代入得,

$$\begin{cases} a_0+x_1a_1+x_1^2a_2+\ldots+x_1^{n-1}a_{n-1}=y_1 \\ a_0+x_2a_1+x_2^2a_2+\ldots+x_2^{n-1}a_{n-1}=y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0+x_na_1+x_n^2a_2+\ldots+x_n^{n-1}a_{n-1}=y_n \end{cases}$$

以 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ 爲未知數, 此聯立方程組的係數行列式爲

Vandermonde行列式, 其值爲 $\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ (定理14)

∵ 因$x_1, x_2, \ldots, x_n$相異, ∴ 其值不爲零,
由Cramer's rule得知所求之係數$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$存在且唯一.

† 習題:18b.1 (交大83資料[5])(中正81資工[2])

Let $t_1, t_2, \ldots, t_r$ be distinct real numbers; let $b_1, b_2, \ldots, b_r$ and $b_1', b_2', \ldots, b_r'$ be real

numbers. Prove that there exits precisely one polynomial P of degree less than or equal to $2r–1$ such that $P(t_i)=b_i$ and $P'(t_i)=b_i'$ for $1\leq i\leq r$, where P' denotes the derivative of P.
(提示: 依本範例之法並引用定理14b)

† 習題:18b.2
對$a, b_0, b_1,..., b_r\in\mathbb{R}$, 證明存在爲唯一的$r$次以內的多項式 $f(x)$, 使 $f(a)=b_0$, $f'(a)=b_1$, $f''(a)=b_2$, ..., $f^{(r)}(a)=b_r$.

† **19** 定理:《行列式的塊狀運算》

① 設A爲$m\times(m+n)$矩陣, B爲$n\times(m+n)$矩陣, 則

$$\det\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=(-1)^{mn}\det\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$$ 《塊狀列對調》

①' 設C爲$(m+n)\times m$矩陣, D爲$(m+n)\times n$矩陣, 則

$$\det\left[\begin{array}{c|c} C & D \end{array}\right]=(-1)^{pq}\det\left[\begin{array}{c|c} D & C \end{array}\right]$$ 《塊狀行對調》

② 設A爲$m\times(m+n)$矩陣, B爲$n\times(m+n)$矩陣, K爲m階方陣, 則

$$\det\begin{bmatrix} KA \\ \hline B \end{bmatrix}=\det K\det\begin{bmatrix} A \\ \hline B \end{bmatrix}$$ 《塊狀列左乘》

②' 設設C爲$(m+n)\times m$矩陣, D爲$(m+n)\times n$矩陣, K爲m階方陣, 則

$$\det\left[\begin{array}{c|c} CK & D \end{array}\right]=\det K\det\left[\begin{array}{c|c} C & D \end{array}\right]$$ 《塊狀行右乘》

③ 設A爲可逆方陣, 則

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det\begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ C & D \end{bmatrix}$$ 《塊狀列提出左因子》

③' 設A爲可逆方陣，則

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det\begin{bmatrix} I & B \\ CA^{-1} & D \end{bmatrix}$$ 《塊狀行提出右因子》

④ 設A爲$m\times p$矩陣，C爲$n\times p$矩陣，K爲$n\times m$矩陣，則

$$\det\left[\begin{array}{cc} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{cc} A & B \\ \hline C+KA & D+KB \end{array}\right]$$ 《塊狀列乘加》

④' 設A爲$m\times p$矩陣，B爲$m\times q$矩陣，H爲$p\times q$矩陣，則

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ C & D \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A & B+AH \\ C & D+CH \end{array}\right]$$ 《塊狀行乘加》

【要訣】(1) 本定理的證法比定理敘述重要．在此所列出的敘述只是一些特例，讀者應依證明內容舉一反三，靈活應用．

(2) "塊狀列對調"時只在雙方高度都是奇數時造成變號．

"塊狀行對調"時只在雙方寬度都是奇數時造成變號．

(3) 本定理須特別注意各矩陣尺度是否相合及各因子之順序．

(4) 左乘爲列運算，右乘爲行運算．本題的證法是由第三章的技巧推廣而得．讀者請參考CH3範例13a及CH3範例28解說．

(5)注意並非所有的列(行)性質都可隨意推廣，例如：

$$\det\begin{bmatrix} AK \\ B \end{bmatrix}$$ 不能提出K． $$\det\begin{bmatrix} KA & B \end{bmatrix}$$ 不能提出K．

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C+AK & D+BK \end{bmatrix} \text{無公式.}\quad \det\begin{bmatrix} A & B+HA \\ C & D+HC \end{bmatrix} \text{無公式}$$

$$\det\begin{bmatrix} A+B \\ C \end{bmatrix} \text{不能化為 } \det\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}.$$

【證】① A的最後一列逐步與B的第一列、第二列、...對調, 通過整個B總共經過n次對調. A的倒數第二列逐步再與B的第一列、第二列、...對調, 通過整個B也經過n次對調. 如此, 將整個A由下而上一列列都通過B累計須經過$n\times m$次對調. 所以兩行列式相差$(-1)^{mn}$的因式.

② $\because \begin{bmatrix} KA \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (CH2定理8)

$$\therefore \det\begin{bmatrix} KA \\ B \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} K & O \\ O & I \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

等號右邊的左因子可經多次的“最後一列降階”逐步降成det$K$.

③套用②即得.

④由下式取行列式再化簡即可得證.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C+KA & D+KB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m} & O \\ K & I_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

④'由下式取行列式再化簡即可得證.

$$\begin{bmatrix} A & B+AH \\ C & D+CH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & H \\ O & I \end{bmatrix}$$

其餘部份由讀者自證.

習題19.1

設A, B, C分別爲$(p+q+r)\times p$, $(p+q+r)\times q$, $(p+q+r)\times r$矩陣. 導出將 $\det[\,A \mid B \mid C\,]$ 化成 $\det[\,A \mid C \mid B\,]$ 的公式.

Ans: 配上因式$(-1)^{qr}$

習題19.2

設A是m階方陣, D是n階方陣, 且A可逆, 試作轉換:

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & ?? \\ O & ?? \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & O \\ ?? & ?? \end{bmatrix}$$

Ans: $\det\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$, $\det\begin{bmatrix} A & O \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$

20 定理:《缺角行列式》 (台大85資工[4])(台大83電機丁[3])

設A爲$m\times m$矩陣, B爲$m\times n$矩陣, C爲$n\times m$矩陣, D爲$n\times n$矩陣, 則

①$\det\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = (\det A)(\det D)$　　②$\det\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A)(\det D)$

【要訣】(1)左上角及右下角必須是方陣才能取行列式.

(2)若$m=n$, 則本定理還可以再化爲$\det(AD)$及$\det(DA)$.

(3)$\det\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)$.

(4)缺左上角或缺右下角的情況可先左做塊狀列對調. (見習題)

† 【證】

① $\because \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & I \end{bmatrix}$, (CH2定理8)

$\therefore \det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & O \\ O & D \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} A & B \\ O & I \end{bmatrix}$ (CH4定理6)

其中第一個因子可由第一列, 第二列, ... , 逐步做降階展開而化爲det$D$. 第二個因子可由最後第一列, 最後第二列, ..., 逐步做降階展開而化爲det$A$.

② $\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ C & D \end{bmatrix}$

讀者仿①自證其餘部分.

習題20.1

證明 $\det \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ O & A_2 & \cdots & * \\ & \cdots & & \\ O & O & \cdots & A_k \end{bmatrix} = (\det A_1)(\det A_2) \ldots (\det A_k)$

其中$A_1, A_2, \ldots, A_k$爲(未必同尺寸的)方陣.

†習題20.2

設A爲$m\times n$矩陣, B爲$m\times m$矩陣, C爲$n\times n$矩陣, D爲$n\times m$矩陣, 則

①$\det \begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix} = (-1)^{mn}(\det C)(\det B)$ ②$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix} = (-1)^{mn}(\det C)(\det B)$

†**21** 定理:《塊狀降階法》

設W爲$m\times m$矩陣, X爲$m\times n$矩陣, Y爲$n\times m$矩陣, Z爲$n\times n$矩陣, 則

① $\det\begin{bmatrix} I_m & X \\ Y & Z \end{bmatrix}=\det(Z-YX)$

② $\det\begin{bmatrix} W & X \\ Y & I_n \end{bmatrix}=\det(W-XY)$

③ 若W可逆, 則 $\det\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}=\det W\det(Z-YW^{-1}X)$ (成大84統計[4]b)

④ 若Z可逆, 則 $\det\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}=\det Z\det(W-XZ^{-1}Y)$

⑤ 若$m=n$, W可逆, 且$WY=YW$, 則 $\det\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}=\det(WZ-YX)$

【要訣】(1) ①的公式不能寫成$\det(Z-XY)$,
②的公式不能寫成$\det(W-YX)$.
(2) ⑤的公式及適用條件可有多種, 讀者可依其證法自行推導.

【證】① (利用塊狀列運算, 原矩陣第一列左乘$-Y$加入第二列:)

$$\begin{bmatrix} I_m & X \\ Y & Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & O \\ Y & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & X \\ O & Z-YX \end{bmatrix}$$

上式兩邊取行列式, 套用定理6及定理20即得.

② (利用塊狀列運算:原矩陣第二列左乘–X加入第一列)

$$\begin{bmatrix} W & X \\ Y & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W-XY & O \\ Y & I_n \end{bmatrix}$$

上式兩邊取行列式, 套用定理6及定理20即得.

③④利用定理19及本定理①②即得.

⑤用本定理③即得.

† 習題21.1 (中正84資工[2])

Let A,B,C,D be $n\times n$ matrices and I be $n\times n$ identity matrix with A invertible.

(a) Find matrices X and Y to produce the block LU factorization

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & Y \end{bmatrix}$$

and then show that

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

(b) Show that if $AC = CA$, then $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB)$.

† 習題21.2 (成功83工程科學丙[4])

Let B be the bordered square matrix

$$B = \begin{bmatrix} A & U \\ V & c \end{bmatrix}$$

where U is a column vector, V is a row vector and c is a number. What is $\det(B)$?

Ans: $c\neq 0$ 時可化爲 $c\det(A-c^{-1}UV)$， 也可化爲 $\det(cA-UV)/(c^{n-1})$

(另請參閱範例12a交叉降階法))

† **22** 定理:《塊狀降階法的推論》

設X爲$m\times n$矩陣, Y爲$n\times m$矩陣, 則 $\det(I_m-XY)=\det(I_n-YX)$

【要訣】注意矩陣的尺度及乘積順序.

【證】

利用定理21①得知等號兩邊都等於 $\det\begin{bmatrix} I_m & X \\ Y & I_n \end{bmatrix}$.

習題22.1 (中正79應數Y[3])

Let F be an $n\times m$ and G be an $m\times n$ matrix, respectively. Prove that $\det(I_n+FG)=\det(I_m+GF)$, where I is the identity matrix.

習題22.2 (清大79數研)

Let A,B be $n\times n$ matrices over $\mathbb{C}$, show that $I-AB$ is invertible if and only if $I-BA$ is invertible. (編註:也請參考CH16範例1)

† **23** 範例:《塊狀降階法的應用》

對$n\times n$矩陣A,B, 證明 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}=\det(A+B)\det(A-B)$

(清大76計管[5(a)])

【解】 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{bmatrix}$ (第一列加入第二列)

$$=\begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix}$$ (第二行乘$-I$加入第一行)

$$\therefore \det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{bmatrix}$$ (第一, 三個行列式降階)

$$=\det(A-B)\det(A+B)$$ (定理20)

【討論】接下去還等於 $\det((A-B)(A+B))$ (定理6)
當$AB=BA$ 時, 還可等於 $\det(A^2-B^2)$.