7 線性映射與矩陣表示

§1. 線性映射 7-2
§2. 矩陣表示 7-14

概要與指引

線性映射是線性代數的主題，本章所討論的是線性映射的初步知識. 第一節介紹線性映射的概念與實例. 第二節定義它的矩陣表示，並討論相對於不同基底的矩陣表示之間的轉換關係.

所謂線性映射，其實就是在向量空間之間，能與運算相配合的函數(定理2). 這種函數只要在一個基底上的值確定，整個函數就跟著確定(定理3). 請特別注意 ： 在行矩陣空間之間，線性映射都是利用矩陣左乘製造出來的(定理6) . 藉著基底，我們一方面用坐標描寫向量，另一方面用矩陣描寫線性映射(定義9). 於是定理6就可以推廣而適用到抽象空間之間的線性映射(定理15).

向量的坐標因基底而定，不同基底所產生的坐標之間可利用基底關係矩陣相聯結(第6章定理33). 同樣，線性映射的矩陣表示因基底而定，不同基底所產生的矩陣之間也可利用基底關係矩陣相聯結(定理24). 線性映射與坐標變換密切相關，但概念上卻是兩回事. 爲了澄清這些概念，我們將上章定理33，本章定理15，定理24這三大定理綜合而成定理26. 藉著定理26的“帳蓬圖”，讀者可以對這些容易混淆的定理得出一個明晰的印象. 注意定理19只是定理24的特例，但在實用上，定理19反而比較重要，也較容易混淆，讀者要對它多加留意.

爲了幫助讀者掌握這些題材，本章特別設計了循序漸進的一連串範例([10]--[20]). 這些題目的基礎還是在上章的定義28和定理33，請務必親自動手演練.

§1. 線性映射

1 定義:《線性映射》

設V,W爲佈於同一個純量體K的兩個向量空間.

①若函數$T: V \longrightarrow W$, 滿足

$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V,\ \forall a,b\in K,\ T(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=aT(\boldsymbol{u})+bT(\boldsymbol{v})$ 《線性條件》

則稱T爲線性映射(*linear mapping*), 或線性變換(*linear transformation*), 或稱線性函數(*linear function*).

②若$W=V$, 線性映射$T: V \longrightarrow V$ 特稱爲線性算子(*linear operator*).

③若$W=K$, (K自己是佈於K的一維空間), 線性映射$T: V \longrightarrow K$ 特稱爲線性泛函(*linear functional*).

④一對一且映成的線性映射稱爲同構映射(*isomorphism*).

⑤定義$\mathscr{L}(V,W)=\{T \mid T: V\longrightarrow W,\ T$爲線性映射$\}$, $\mathscr{L}(V)=\mathscr{L}(V,V)$, $V^*=\mathscr{L}(V,K)$.

⑥ 若$K=\mathbb{C}$, 且函數$T: V \longrightarrow W$滿足

$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V,\ \forall a,b\in \mathbb{C},\ T(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=\bar{a}T(\boldsymbol{u})+\bar{b}T(\boldsymbol{v})$.

則稱T爲半線性映射(*semi-linear mapping*).

【要訣】(1)線性映射就是能配合運算的函數: 線性組合的像與像的線性組合相等.

$$\begin{aligned} u &\xmapsto{\ \ T\ \ } Tu \\ v &\xmapsto{\ \ T\ \ } Tv \\ hu+kv &\xmapsto{\ \ T\ \ } hTu+kTv \end{aligned}$$

(2)佈於同一個純量體的兩個向量空間之間才討論線性映射.

(3)$T(\boldsymbol{v})$常簡記爲$T\boldsymbol{v}$.

習題1.1

① 設$I: V\longrightarrow V$, 定義如 $I(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$, 證明$I$是線性映射.

② 設$O: V\longrightarrow W$, 定義如 $O(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$, 證明$O$是線性映射.

③ 對純量k, 定義$T_k:V\longrightarrow V$ 如 $T_k(\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{v}$. 證明$T_k$是線性映射.

2 定理:《線性條件的變型及推論》

設V, W爲佈於純量體K的向量空間.

① 對函數$T:V\longrightarrow W$, 下列各敘述等價:

(ⅰ) $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, $\forall h,k\in K$, $T(h\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v})=hT(\boldsymbol{u})+kT(\boldsymbol{v})$.

(ⅱ) $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, $\forall h\in K$, $T(h\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=hT(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{v})$.

(ⅲ) (a) $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{v})$, 《加法群同態》

(b) $\forall h\in K$, $\forall \boldsymbol{u}\in V$, $T(h\boldsymbol{u})=hT(\boldsymbol{u})$.

(ⅳ) $\forall p\in \mathbb{Z}^+$; $\forall \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_p\in V$; $\forall h_1,h_2,\ldots,h_p\in K$;

$T(h_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+h_p\boldsymbol{u}_p)=h_1T(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+h_pT(\boldsymbol{u}_p)$.

(上式常寫爲$T(\sum_{i=1}^{p}h_i\boldsymbol{u}_i)=\sum_{i=1}^{p}h_iT\boldsymbol{u}_i)$)

② 若①(ⅲ)(a)成立, 則

(a) $T(\boldsymbol{o})=\boldsymbol{o}$.

(b) $\forall \boldsymbol{v}\in V$, $T(-\boldsymbol{v})=-T(\boldsymbol{v})$.

(c) $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, $T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{u})-T(\boldsymbol{v})$.

【要訣】(1)要證明T是線性映射時, 通常使用①(ⅰ)或①(ⅲ). 在型式簡單時, 可用①(ⅰ)一次完成. 若較複雜, 可用①(ⅲ)分兩部分加以證明.

(2)若$T:V\longrightarrow W$不滿足$T(\boldsymbol{o})=\boldsymbol{o}$, 則$T$不是線性映射.

【證】(先證明②)

② (a) $T(\boldsymbol{o})=T(\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o})=T(\boldsymbol{o})+T(\boldsymbol{o})$

等號兩邊加上$-T(\boldsymbol{o})$ 即得 $\boldsymbol{o}=T(\boldsymbol{o})$.

(b) $T(\boldsymbol{v})+T(-\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}))=T(\boldsymbol{o})=\boldsymbol{o}$ (套用②(a))

等號兩邊加上 $-T(\boldsymbol{v})$ 即得 .

(c) $T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v}))=T(\boldsymbol{u})+T(-\boldsymbol{v})=T\boldsymbol{u}-T\boldsymbol{v}$. (套用②(b))

① [(ⅰ) $\Longrightarrow$ (ⅱ)] (ⅰ)中令k=1即得(ⅱ).

[(ⅱ) $\Longrightarrow$ (ⅲ)] (ⅱ)中令h=1即得(ⅲ)(a).

在(ⅱ)中令$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$由②(a)即得(ⅲ)(b).

[(ⅲ) $\Longrightarrow$ (ⅳ)] 由ⅲ(b)得知$\forall i$, $T(h_i\boldsymbol{u}_i)=h_iT\boldsymbol{u}_i$.

再由ⅲ(a)可逐步得出 $T(\sum_i h_i\boldsymbol{u}_i)=\sum_i T(h_i\boldsymbol{u}_i)$.

[(ⅳ) $\Longrightarrow$ (ⅰ)] 在(ⅳ)中令$p=2$ 即得(ⅰ).

習題2.1

對線性映射T, 證明 $T(h\boldsymbol{u}-k\boldsymbol{v})=hT(\boldsymbol{u})-kT(\boldsymbol{v})$.

3 定理:《由基底造線性映射》

① 設$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$是向量空間$V$的一個基底, 而$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n$爲向量空間$W$內的$n$個向量, 則存在唯一的$T\in\mathscr{L}(V,W)$滿足$T(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{w}_j$; $j=1,2,...,n$.

② 接①, 若$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n$線性獨立, 則$T$爲一對一.

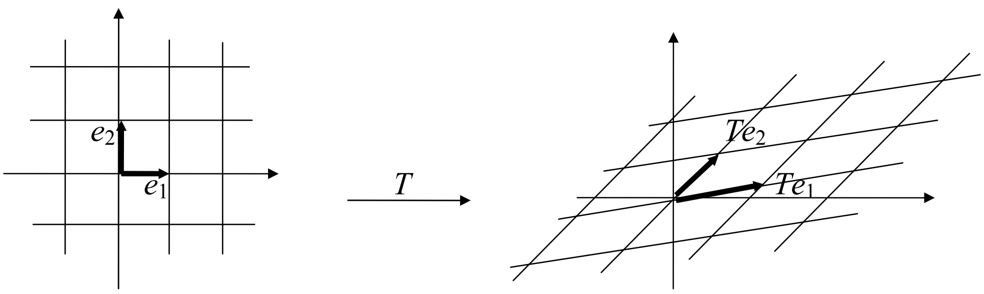
③ 接①, 若$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n$生成$W$, 則$T$爲映成.

④ 接①, 若$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n$是$W$的基底, 則$T$爲一對一且映成的線性映射.

⑤ 設$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$是向量空間$V$的一個生成集, $T_1, T_2\in\mathscr{L}(V,W)$.
若$T_1(\boldsymbol{v}_j)=T_2(\boldsymbol{v}_j)$; $j=1,2,...,r$. 則$T_1=T_2$.

⑥ 設$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$是有限維向量空間$V$內的獨立集, 而$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_r$爲向量空間$W$內的$r$個向量, 則存在$T\in\mathscr{L}(V,W)$滿足$T(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{w}_j$; $j=1,2,...,r$.

【要訣】(1)定好線性映射在一組基底的像後, 這個線性映射就被唯一確定.
幾何意義如下圖:



(2)兩個線性映射若在某個基底(或生成集)上取值相等, 則這兩個線性映射相等.

【證】①[存在性]

依下法定義函數 $T:V\longrightarrow W$:

對各個$\boldsymbol{v}\in V$, 因$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$爲基底,

可取得唯一的$h_1, h_2, ..., h_n$使$\boldsymbol{v}=h_1\boldsymbol{v}_1+h_2\boldsymbol{v}_2+...+h_n\boldsymbol{v}_n$.

然後就令 $T(\boldsymbol{v}) = h_1\boldsymbol{w}_1+h_2\boldsymbol{w}_2+...+h_n\boldsymbol{w}_n$

這樣所產生的函數T會滿足 $T\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{w}_j$, $j=1,2,...,n$ 的要求.

$\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\in V, \forall a_1, a_2\in K,$

取 $h_1, h_2, ..., h_n, k_1, k_2, ..., k_n\in K$, 使 $\boldsymbol{u}_1=\sum h_j\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{u}_2=\sum k_j\boldsymbol{v}_j$, 則

$T(a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2) = T(a_1\sum h_j\boldsymbol{v}_i+a_2\sum k_j\boldsymbol{v}_j) = T(\sum(a_1h_j+a_2k_j)\boldsymbol{v}_j)$

$= \sum(a_1h_j+a_2k_j)\boldsymbol{w}_j$ (依T 的定義法)

$= a_1\sum h_j\boldsymbol{w}_j + a_2\sum k_j\boldsymbol{w}_j$

$= a_1T(\sum h_j\boldsymbol{v}_j) + a_2T(\sum k_j\boldsymbol{v}_j)$ (依T 的定義法)

$= a_1T(\boldsymbol{u}_1)+a_2T(\boldsymbol{u}_2)$

∴ T是線性映射.

[唯一性]

若S爲線性映射, 滿足$S(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{w}_j$, $j=1,2,...,n$.

對任意$\boldsymbol{v}\in V$, 取$h_1, h_2, ..., h_n$使 $\boldsymbol{v}=h_1\boldsymbol{v}_1+h_2\boldsymbol{v}_2+...+h_n\boldsymbol{v}_n$,

則 $S(\boldsymbol{v})=S(h_1\boldsymbol{v}_1+h_2\boldsymbol{v}_2+...+h_n\boldsymbol{v}_n)$

$=h_1S\boldsymbol{v}_1+h_2S\boldsymbol{v}_2+...+h_nS\boldsymbol{v}_n$ (S的線性條件)

$=h_1\boldsymbol{w}_1+h_2\boldsymbol{w}_2+...+h_n\boldsymbol{w}_n$ (S的已知條件)

$= T(h_1\boldsymbol{v}_1+h_2\boldsymbol{v}_2+...+h_n\boldsymbol{v}_n)=T(\boldsymbol{v})$. (①中T的定義法)

∴ $S = T$.

† ② 由CH8定理7, 我們須證明的只是 “ $T\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ ”.

令 $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+...+x_n\boldsymbol{v}_n$.

若 $T(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$, 則 $T(x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+ ... +x_n\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{o}$,

∴ $x_1\boldsymbol{w}_1+x_2\boldsymbol{w}_2+ ... +x_n\boldsymbol{w}_n=\boldsymbol{o}$. (①中T的定義法)

由 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n$ 線性獨立可得知 $x_1=x_2=...=x_n=0$. (CH6定義9)

$\therefore\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$.

† ③ $\forall\, \boldsymbol{w}\in W$, (我們想找出某個$\boldsymbol{v}$使得$T\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$)

因$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n$生成$W$, 所以存在純量 $y_1, y_2,..., y_n$使

$\boldsymbol{w} = y_1\boldsymbol{w}_1+y_2\boldsymbol{w}_2+ ... +y_n\boldsymbol{w}_n$.

於是 $\boldsymbol{w} = y_1T\boldsymbol{v}_1 + y_2T\boldsymbol{v}_2 + ... + y_nT\boldsymbol{v}_n = T(y_1\boldsymbol{v}_1+y_2\boldsymbol{v}_2+...+y_n\boldsymbol{v}_n)$

④ 由②③即得.

⑤ 讀者仿①自證.

⑥ 將$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$擴大成$V$的基底$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$, (CH6定理21)

並將$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_r$擴大成$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n$ 由①即得證.

† 習題3.1

證明本定理⑤

† 習題3.2

(1) 接本定理⑤, 舉例說明T未必存在.

(2) 接本定理⑥, 舉例說明T未必唯一.

Ans: ①例如$T(1,0)=(1,0)$, $T(0,1)=(0,1)$, $T(1,1)=(2,3)$

4 範例:《由基底求算線性映射》

設線性映射$T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, 滿足$T(1, 2)=(3, 2, 1)$, $T(3, 4)=(6, 5, 4)$.

①求$T(1, 0)$, ②求$T(2, 4)$, ③求$T(x, y)$.

【解】①令$(1, 0) = \alpha(1, 2)+\beta(3, 4)$, 可解出$\alpha = -2$, $\beta = 1$

$\therefore T(1, 0) = T(-2(1, 2)+(3, 4)) = -2T(1, 2)+T(3, 4)$

$= -2(3, 2, 1)+(6, 5, 4) = (0, 1, 2)$

②讀者自求. 答案爲 $(6, 4, 2)$

③令$(x, y) =\alpha(1, 2)+\beta(3, 4)$,

即 $\begin{cases} \alpha+3\beta = x \\ 2\alpha+4\beta = y \end{cases}$,

可解得$\alpha = (-4x+3y)/2$, $\beta = (2x-y)/2$

$\therefore\ T(x, y)=\alpha(1, 2)+\beta T(3, 4) = ((-4x+3y)/2)(3, 2, 1)+((2x-y)/2)(6, 5, 4)$
$=(3y/2\ ,\ (2x+y)/2,\ (4x-y)/2\ )$

習題4.1 (元智80工工[1])
若線性映射T：$\mathbb{R}[x]\longrightarrow\mathbb{R}[x]$滿足$T(x+1) = x$, $T(x-1) = 1$, $T(x^2) = 0$
求$T(2+3x-x^2)$.

Ans $(5/2)x+(1/2)$

習題4.2 (東華88資工[8])
Prove that there exist a linear transformation $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
such that $T(1, 1)=(1, 0, 2)$ and $T(2, 3)=(1, -1, 4)$. (8%)
What is $T(8, 11)$? (4%)

Ans: $T(8,11)=(5, -3, 16)$

5 範例:《tuple-space線性映射的一般型》
寫出線性映射T的一般型:
① $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, ② $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times1}$,
③$T:\mathbb{R}^{3\times1}\longrightarrow\mathbb{R}$, ④ $T:\mathbb{R}^{3\times1}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times1}$.

【解】① 令 $T(1) = a$. 則 $T(x) = T(x\cdot 1) = xT(1) = x\cdot a$.
$\therefore\ T(x) = ax$

② 令$T(1) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 則$T(x) = T(x\cdot 1) = xT(1) = x\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

$\therefore T(x) = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix}$.

③ 令$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=a,\ T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=b,\ T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=c,$

則$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=T\left(x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

$$=xT\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+yT\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+zT\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=ax+by+cz$$

④ 令$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix},$

則$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=xT\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+yT\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+zT\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$=x\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1x+b_1y+c_1z\\a_2x+b_2y+c_2z\end{bmatrix}$$

習題5.1

依本範例之方法，寫出線性映射$T:\mathbb{R}^{1\times3}\longrightarrow\mathbb{R}^{1\times2}$ 的一般型.

Ans: $T(x,y,z)=(a_1x+b_1y+c_1z,\ a_2x+b_2y+c_2z)$

† 習題5.2

寫出線性映射T：$\mathbb{R}^{1\times3}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times2}$ 的一般型.

$$\text{Ans: } T(x,y,z) = \begin{bmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & a_2x+b_2y+c_2z \\ a_3x+b_3y+c_3z & a_4x+b_4y+c_4z \end{bmatrix}$$

† 習題5.3

寫出線性映射T：$\mathbb{R}^{(2)}[x,y]\longrightarrow\mathbb{R}$的一般型.

Ans: $T(a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2) = p_1a+p_2b+p_3c+p_4d+p_5e+p_6f$

† 習題5.4

寫出半線性映射T：$\mathbb{C}^{1\times3}\longrightarrow\mathbb{C}^{1\times2}$ 的一般型.

Ans: $T(x,y,z) = (a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1\bar{z},\ a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2\bar{z})$

◎ ❻ 定理:《tuple-space線性映射的一般型》

①對$A\in K^{m\times n}$, 定義函數T：$K^{n\times1}\longrightarrow K^{m\times1}$ 如 $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$, 則T是線性映射.

②對線性映射T：$K^{n\times1}\longrightarrow K^{m\times1}$, 存在唯一的$A\in K^{m\times n}$, 滿足

$\forall\boldsymbol{x}\in K^{n\times1}$, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ . .

③對$A\in K^{m\times n}$, 定義函數T：$K^{1\times m}\longrightarrow K^{1\times n}$ 如 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}A$. 則T是線性映射.

④對線性映射T：$K^{1\times m}\longrightarrow K^{1\times n}$, 存在唯一的矩陣$A\in K^{m\times n}$, 滿足

$\forall\boldsymbol{x}\in K^{1\times m}$, $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}A$, .

【要訣】(1)對①②, A的第j行是$T(\boldsymbol{e}_j)$, 也就是$K^{n\times1}$中第j個標準單位向量的像.

— 務必牢記!

(2)由此定理①②可知, $K^{n\times1}$到$K^{m\times1}$的線性映射恰可由$K^{m\times n}$中的矩陣完全描寫, 而且使線性映射與矩陣之間形成“一對一對應”的配對關係.

(3)線性映射T通常有3種表示法如下: (以T：$\mathbb{R}^{2\times1}\longrightarrow\mathbb{R}^{3\times1}$爲例)

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 \end{bmatrix}.$$

其中第3種還可寫成:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1+a_{22}x_2 \\ y_3 = a_{31}x_1+a_{32}x_2 \end{cases}.$$

【證】①$\forall a,b\in K$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in K^{n\times 1}$, $T(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=A(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=aA\boldsymbol{x}+bA\boldsymbol{y}=aT(\boldsymbol{x})+bT(\boldsymbol{y})$

$\therefore T$是線性映射.

②[存在性]

令A的各行依次爲$T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), \dots ,T(\boldsymbol{e}_n)$

其中 $\boldsymbol{e}_i=[\,0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0\,]^T$ ←第i位是1，其他都是0.

並令 $\boldsymbol{x}=[\,x_1, x_2, \dots, x_n\,]^T$.

則 $T(\boldsymbol{x}) = T(x_1\boldsymbol{e}_1+\dots+x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1T\boldsymbol{e}_1+ \dots+x_nT\boldsymbol{e}_n$

$= \sum x_1(A$的第i行$) = A\boldsymbol{x}$ (CH2定理6)

[唯一性]

A如前，若另有矩陣B，使得 $T(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}$，則

$\forall j=1,2,...,n,\quad (B$的第$j$行$)=B\boldsymbol{e}_j=T(e_j)=(A$的第$j$行$)$.

$\therefore\ B=A$

③④ 讀者自證.

習題6.1

證明本定理③④.

＊習題6.2

①對$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 定義函數$T:\mathbb{C}^{n\times1}\longrightarrow\mathbb{C}^{m\times1}$ 如 $T(\boldsymbol{x})=A\,\bar{\boldsymbol{x}}$, 則$T$是半線性映射.

②對半線性映射$T:\mathbb{C}^{n\times1}\longrightarrow\mathbb{C}^{m\times1}$, 存在唯一的$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 滿足

$$\forall x\in\mathbb{C}^{n\times1},\ T(\boldsymbol{x})=A\,\bar{\boldsymbol{x}},\qquad .$$

7 範例:《線性映射的判定--tuple-space》

判斷下列各題的函數T是不是線性映射?

①$T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $T(x,y,z)=(5x-2y+z,\ x-4z)$.

②$T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $T(x,y,z)=(5x-2+z,\ x-4z)$.

③$T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $T(x,y,z)=(5x+z,\ xy-4z)$.

④$T:\mathbb{R}^{3\times1}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times1}$,

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5&-2&1\\1&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ .$$

⑤$T:\mathbb{R}^{3\times1}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times1}$,

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5&-2&1\\1&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}\ .$$

⑥對$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$, T: $\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}$. (外積)
⑦對$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^{n\times1}$, T: $\mathbb{R}^{n\times1}\longrightarrow\mathbb{R}$, $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$.

【要訣】(1)線性映射把定義域的$\boldsymbol{o}$映到對應域的$\boldsymbol{o}$.
(2)線性映射的各分量都是一次齊次式.

【解】①是; 讀者自驗證線性條件.
②否; $T(0, 0, 0)=(-2, 0)$, 不合要求.
③否; $T(-1,-1,0)=(-5, 1)$, $T(1, 1, 0)=(5, 1)$. ∴ $T(-(1, 1, 0))\neq -T(1, 1, 0)$.
④是; 讀者仿定理6①自證.
⑤否; $T\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.
⑥是, 由外積的性質即得.
⑦是, 由矩陣的性質即得.

習題7.1
下列哪幾題的函數 T:$\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 是線性映射?
① $T(x_1, x_2) = (1+x_1, x_2)$, ② $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, ③ $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$,
④ $T(x_1, x_2) = (\sin x_1, x_2)$, ⑤ $T(x_1, x_2) = (x_1-x_2, 0)$.
Ans: ②,⑤.

8 範例:《線性映射的判定--抽象空間》
判斷下列各函數是否爲線性映射:
① 設$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$; T : $\mathbb{R}^{n\times k}\longrightarrow\mathbb{R}^{m\times k}$, $T(X) = AX$.
② 設T : $K^{m\times n}\longrightarrow K^{n\times m}$, $T(X) = X^{\mathrm{T}}$.
②' 設T : $\mathbb{C}^{m\times n}\longrightarrow\mathbb{C}^{n\times m}$, $T(X) = X^{\mathrm{H}}$.
③ 設T : $K^{n\times n}\longrightarrow K$, $T(X) = \mathrm{tr}(X)$
③' 設T : $K^{n\times n}\longrightarrow K$, $T(X) = \det(X)$

④ d/dx：$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, d/dx爲微分算子 .

⑤ T：$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $T(p(x)) = x \cdot p(x)$.

⑤' T：$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $T(p(x)) = p(x)+x$.

† ⑥ 對 $\mathbb{R}^\infty = \{\langle x_i \rangle \mid x_i \in \mathbb{R}, i=0,1,2,... \}$, (CH5範例5)

SR:$\mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $SR(\langle x_i \rangle) = \langle y_i \rangle$. 其中 $y_0=0, y_i=x_{i-1}, i>0$ 《Shift-right》

† ⑥'SL:$\mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $SL(\langle x_i \rangle) = \langle y_i \rangle$. 其中 $y_i=x_{i+1}, i\geq 0$ 《Shift-left》

† ⑥" Δ :$\mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $\Delta(\langle x_i \rangle) = \langle y_i \rangle$. 其中 $y_i=x_{i+1}-x_i$, $i\geq 0$ 《差分,difference》

⑦令$\mathbb{R}^{\mathrm{R}} = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, T:$\mathbb{R}^{\mathrm{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = f(3)$. (CH5範例5)

【解】① 是; $T(aX+by) = A(aX+bY) = aAX+bAY = aT(X)+bT(Y)$

② 是. 由CH2定理23即得

②' 否. 但它是半線性映射. (CH2定理23)

③ 是. 由CH2定理28即得

③' 否. 請復習CH4定理7要訣及習題

④ 是; $(af(x)+bg(x))'=af'(x)+bg'(x)$. (微積分的定理)

⑤ 是; $T(a\,p(x)+b\,q(x))=x(a\,p(x)+bq(x))=a\,xp(x)+b\,xq(x)=aT(p(x))+bT(q(x))$.

⑤' 否; $T(0)=x\neq 0$

⑥⑥'⑥" 都是, 讀者自證.

⑦ 是; $T(af+bg)=(af+bg)(3)=af(3)+bg(3)=aT(f)+bT(g)$

習題8.1

$V = \{f \mid f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f$爲連續函數$\}$, T：$V \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

判斷T是否爲線性映射.

Ans: 是.

習題8.2

設$V = \{X \mid X$爲隨機變數$\}$, T：$V \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(X) = EX$ (期望值) 判斷T是否爲線性映射.

Ans:是

習題8.3

判斷T是否爲線性映射.

令$V=\{f\in\mathbb{R}^{\mathrm{R}}\mid f$無限次可微$\}$, $T:V\longrightarrow V$, $T(f)=f''-4f'+5f$.

Ans:是

§2. 矩陣表示

◎ **9** 定義:《矩陣表示,matrix representation》

①對線性映射$T:V\longrightarrow W$, V的基底$B=\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2,..., \boldsymbol{b}_{\mathrm{n}}\}$及$W$的基底$C=\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, ..., \boldsymbol{c}_{\mathrm{m}}\}$.

$$\text{令}\begin{cases} T(\boldsymbol{b}_1)=a_{11}\boldsymbol{c}_1+a_{21}\boldsymbol{c}_2+...+a_{\mathrm{m}1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{m}} \\ T(\boldsymbol{b}_2)=a_{12}\boldsymbol{c}_1+a_{22}\boldsymbol{c}_2+...+a_{\mathrm{m}2}\boldsymbol{c}_{\mathrm{m}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ T(\boldsymbol{b}_{\mathrm{n}})=a_{1\mathrm{n}}\boldsymbol{c}_1+a_{2\mathrm{n}}\boldsymbol{c}_2+...+a_{\mathrm{mn}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{m}} \end{cases} \qquad \text{《}T\text{的基底行爲》}$$

$$\text{則稱}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}\text{爲}T\text{相對於}B, C\text{的矩陣表示, 記爲}\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_C^B .$$

若上下文很明確或不強調基底, 可簡記爲 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$

②在$W=V$且$C=B$時將 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_B^B$ 簡記爲 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_B$,稱爲T相對於B的矩陣表示.

【要訣】(1)上述公式可簡記爲:

$$T(\boldsymbol{b}_{\mathrm{j}})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} a_{\mathrm{ij}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{i}} \quad , \quad j=1,2,...,n .$$

(2) $\left[\,T(\boldsymbol{b}_{\mathrm{j}})\,\right]_C = \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{j}} \\ a_{2\mathrm{j}} \\ . \\ a_{\mathrm{mj}} \end{bmatrix}$; $j = 1,2,...,n$.

就是說: 第j個基底向量的像的C-坐標是矩陣表示的第j行.

(3)(4) (改編爲定理9a.)

(5)矩陣表示的符號 $\left[\,T\,\right]_C^B$ 並不統一.

(6)矩陣表示是簡單, 但卻容易弄混淆的題材. 對此類問題, 讀者務必按照定義一步步的求算, 不可在尚未熟練就試圖取巧. 在此提供兩條"練功法"供讀者揣模:

(一)求矩陣表示就是看基底行爲.

(二)注意是哪一個描寫系統.

範例10～14供讀者演練第一條. 其中範例17, 18較難, 必須一二兩條混合使用.

◎ **9 a** 定理:《左乘(右乘)的矩陣表示》

對$A \in K^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$

① 若 $T_1 : K^{\mathrm{n}\times1} \longrightarrow K^{\mathrm{m}\times1}$ 定義爲 $T_1(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$, 則T_1對標準基底的矩陣表示爲A.

② 若 $T_2 : K^{1\times\mathrm{m}} \longrightarrow K^{1\times\mathrm{n}}$ 定義爲 $T_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}A$, 則T_2對標準基底的矩陣表示爲A^{T}.

【證】略, 讀者自證.

習題9a.1

試對$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$ 驗證本定理.

10 範例:《同一個映射的許多矩陣表示》

設T:$\mathbb{R}^{2\times 1}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times 1}$ 定爲 $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

對$S=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $B=\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $B'=\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$,

求 ① $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_S^S$, ② $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_B^S$, ③ $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_S^B$, ④ $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_B^B$, ⑤ $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{B'}^B$

【要訣】(1)線性算子相對於k組基底可有k^2種矩陣表示.

【解】①

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}=1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_S^S=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(定義9)}$$

② 接①, 令

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

可解出 $a=2, b=1, c=3, d=1$.

$$\therefore \quad \left[T\right]_{B}^{S} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(定義9)}$$

③$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \left[T\right]_{S}^{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(定義9)}$$

④ 接③, 令

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\therefore \quad a - b=3, \quad a + b =7, \quad c - d =1, \quad c + d =1$

可解出$a = 5, b = 2, c = 1, d = 0$.

$$\therefore \quad \left[T\right]_{B}^{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(定義9)}$$

⑤ 接③, 令

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

可解出 $a = 3/2, \quad b = -7, \quad c=1/2, \quad d = -1$.

$$\therefore \left[T\right]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(定義9)}$$

習題10.1

接本範例，求 $\left[T\right]_{B'}^{S}$， $\left[T\right]_{S}^{B'}$， $\left[T\right]_{B'}^{B'}$， $\left[T\right]_{B}^{B'}$.

習題10.2

接本範例，對 $C = \{ (-3+\sqrt{33}, 6)^{T}, (-3-\sqrt{33}, 6)^{T} \}$，求 $\left[T\right]_{C}^{C}$.

Ans: $\begin{bmatrix} (5+\sqrt{33})/2 & 0 \\ 0 & (5-\sqrt{33})/2 \end{bmatrix}$

習題10.3 (中山82應數丙[9])

求線性映射 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ -x+y \end{bmatrix}$ 對基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ 的矩陣表示

Ans: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

11 範例:《同一個矩陣代表許多線性映射》

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$， $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$， $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}; \quad T_i\colon\ \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 1} \text{爲線性映射.}$$

①設 $\left[T_1 \right]_S^S = A$, 求$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. ②設 $\left[T_2 \right]_B^S = A$, 求$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

③設 $\left[T_3 \right]_S^B = A$, 求$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ④設 $\left[T_4 \right]_B^B = A$, 求$T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

⑤設 $\left[T_5 \right]_{B'}^B = A$, 求$T_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

【解】① 由定義9得

$$\begin{cases} T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ T_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_1 \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = x T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y T_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(定義1)}$$

$$= x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$$

$$②T_2\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix},$$

$$T_2\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}.$$

$$T_2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=T_2\left(x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=xT_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+yT_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=x\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x-2y\\4x+6y\end{bmatrix}$$

$$③T_3\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},$$

$$T_3\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

令 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=u\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

即 $\begin{cases}u-v=x\\u+v=y\end{cases}$，可解出 $u=\dfrac{x+y}{2}$, $v=\dfrac{y-x}{2}$

$$\therefore T_3\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=T_3\left(\frac{x+y}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{y-x}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{x+y}{2} T_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2} T_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x+y}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y-x/2 \\ -x+7y/2 \end{bmatrix}$$

④$T_4 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$T_4 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

由③已知 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore T_4 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{x+y}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ 5y-x \end{bmatrix}$$

⑤$T_5 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$,

$$T_5 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

由③已知 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{x+y}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dfrac{y-x}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T_5\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{x+y}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+3y \\ x-7y/2 \end{bmatrix}.$$

習題11.1

同上, 設 $\begin{bmatrix} T_6 \end{bmatrix}_{B'}^{S} = \begin{bmatrix} T_7 \end{bmatrix}_{S}^{B'} = \begin{bmatrix} T_8 \end{bmatrix}_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} T_9 \end{bmatrix}_{B}^{B'} = A$, 分別求$T_6, T_7, T_8, T_9$.

12 **範例:《異維度空間之間的線性映射》**

設$T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 定義爲$T(x, y) = (3x-2y, 0, x+4y)$.

①對標準基底, 求 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$.

②令 $B = \{(1, 1), (0, 2)\}$, $C = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, 求 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{C}^{B}$.

③令 $D = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $E = \{(3, 0, 1), (-2, 0, 4), (0, 1, 0)\}$, 求 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{E}^{D}$.

【解】① $T(1, 0)=(3, 0, 1)=3(1, 0, 0)+0(0, 1, 0)+1(0, 0, 1)$,

$T(0, 1)=(-2, 0, 4)= -2(1, 0, 0)+0(0, 1, 0)+4(0, 0, 1)$.

$$\therefore \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

②$T(1, 1)=(1, 0, 5)$, $T(0, 2)=(-4, 0, 8)$

令 $(1, 0, 5)=a_1(1, 1, 0)+a_2(1, 0, 1)+a_3(0, 1, 1)$,

$(-4, 0, 8)=b_1(1, 1, 0)+b_2(1, 0, 1)+b_3(0, 1, 1)$.

得 $\begin{cases} a_1+a_2 \qquad =1 \\ a_1 \qquad +a_3=0 \\ \qquad a_2+a_3=5 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} b_1+b_2 \qquad =-4 \\ b_1 \qquad +b_3=0 \\ \qquad b_2+b_3=8 \end{cases}$

此二方程組之係數矩陣相同，可同步解之:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\therefore \left[T\right]_C^B = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

③

$$\left[T\right]_E^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ，細節請讀者自行推演.

習題12.1

設T：$\mathbb{R}^{3\times1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times1}$ 定爲 $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+4z \\ 2x+3y-9z \end{bmatrix}$，

求T對標準基底的矩陣表示.

Ans: $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix}$.

習題12.2

設$T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$定爲 $T(x, y, z) = 5x-2y+3z$, 求T對標準基底的矩陣表示.

Ans: $[\,5 \quad -2 \quad 3\,]$

習題12.3

設$T:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 定爲 $T(x)=(5x, -2x, 3x)$求T對標準基底的矩陣表示.

Ans: $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

習題12.4 (成大81資工甲乙[5])

Let L ： $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be defined for $x = [x_1, x_2, x_3]^t$ by

$$L(x) = \begin{bmatrix} 3x_1-x_2+2x_3 \\ 2x_1+4x_2-x_3 \end{bmatrix}$$

Let $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ and $T = \{w_1, w_2\}$, where $v_1 = [1, 1, 0]^t$,
$v_2 = [1, 0, 1]^t$, $v_3 = [1, 1, 1]^t$, $w_1 = [1, 1]^t$ and $w_2 = [-1, 0]^t$.

(a) Determine the matrix A of L with respect to bases S and T.

(b) Compute $L(x)$ for $x = [4, 2, 1]^t$. (5%)

Ans: (a) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 12 \\ 15 \end{bmatrix}$

13 **範例**:《多項式空間之間的線性映射》

令$V = \{\, p(x,y)\in \mathbb{R}[x,y] \mid \deg p(x,y)\le 2 \,\} \cup \{\, 0 \,\}$

設$T: V \longrightarrow V$, 定爲$T(p(x,y)) = \partial p(x,y)/\partial x$

① 取 $B = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$, 求 $\left[\, T \,\right]_B$.

② 取 $C = \{x^2, 2x, 2, xy, y, y^2\}$, 求 $\left[\, T \,\right]_C$.

【解】①

$$\begin{aligned}
\partial 1/\partial x &= 0 && = 0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot y+0\cdot x^2+0\cdot xy+0\cdot y^2\\
\partial x/\partial x &= 1 && = 1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot y+0\cdot x^2+0\cdot xy+0\cdot y^2\\
\partial y/\partial x &= 0 && = 0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot y+0\cdot x^2+0\cdot xy+0\cdot y^2\\
\partial x^2/\partial x &= 2x && = 0\cdot 1+2\cdot x+0\cdot y+0\cdot x^2+0\cdot xy+0\cdot y^2\\
\partial xy/\partial x &= y && = 0\cdot 1+0\cdot x+1\cdot y+0\cdot x^2+0\cdot xy+0\cdot y^2\\
\partial y^2/\partial x &= 0 && = 0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot y+0\cdot x^2+0\cdot xy+0\cdot y^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ 所求爲 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

② 所求爲 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

習題13.1 (成大84統計[6])

(a) 令$T(f) = D^2(f)+D(f)+f$, 其中$D(f)$爲 f 的導數, $D^2(f) = D(D(f))$, 又設 $W = \text{span}(\ \{e^x , xe^x , x^2e^x\}\ )$. 證明$T$是$W$上的一個線性算子.

(b) 對應基底 $B = \{e^x , xe^x , x^2e^x\}$, 求$T$的矩陣.

Ans: (b) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

習題13.2 (師大87資教[6])

Let D be the differentiation operator. Find the matrix A representing D with respect to $[1, x, x^2]$ and the matrix B representing D with respect to $[\ 1, 2x, 4x^2–2\ ]$.

Ans: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

習題13.3

令$\mathbb{R}^{(m)}[x]$爲m次以內之多項式空間, 設T : $\mathbb{R}^{(2)}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{(3)}[x]$, 定爲

$$T(p(x)) = (x+2)p(x)$$

①證明T是線性映射.

②求T對基底 $\{1, x, x^2\}, \{1, x, x^2, x^3\}$ 的矩陣表示.

Ans: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14 範例:《矩陣空間的線性映射》

設T：$\mathbb{R}^{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times1}$ 定為 $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

取 $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$,

$C = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, 求 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_C^B$

【解】$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

習題14.1

設T:$\mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$定義為 $T(A) = (1/2)(A+A^{\mathrm{T}})$

①試證T為線性映射.

②求T對 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 的矩陣表示.

$$\text{Ans: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

習題14.2

設T:$\mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ 定義為$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ d & c \end{bmatrix}$,

求T對 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 的矩陣表示.

$$\text{Ans: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

習題14.3 (工技84電子[2])

Let V be the set of all 2×2 matrices with real entries. A linear transformation T：$V \longrightarrow V$ is defined by $T(A) = AJ – JA$, where A is a matrix in V and

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

An ordered basis for V is given by

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Find the matrix of T relative to B .

$$\text{Ans: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

◎15 定理:《線性映射的坐標公式》

設B, C分別爲有限維向量空間V,W之基底; T：$V \longrightarrow W$爲線性映射,

①$\forall \mathbf{v} \in V$, $\left[T\mathbf{v}\right]_C = \left[T\right]_C^B \left[\mathbf{v}\right]_B$

②若矩陣A滿足:

$\forall \mathbf{v} \in V$, $\left[T\mathbf{v}\right]_C = A\left[\mathbf{v}\right]_B$

則 $A = \left[T\right]_C^B$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\ ]_B}"] & W \arrow[d, "{[\ ]_C}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "{[T]_C^B}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

【要訣】(1)線性映射有兩種描述法:

(a)描述基底在映射下的行爲(定義9).

(b)描述坐標的映射公式(如本定理).

這也是矩陣表示的兩種用法.

(2)用矩陣乘法計算線性映射的值較簡便，但基底必須相合才能應用.

(3)本定理爲求矩陣表示的另一種方法.

(4)在T：$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 時對標準基底應用本定理十分方便. 但要記得向量必須排成行向量的型式.

† 【證】①令$B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n\}$, $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, ..., \boldsymbol{c}_m\}$,

設 $$\left[T\right]_C^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\left[\boldsymbol{v}\right]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \left[T\boldsymbol{v}\right]_C = \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_m \end{bmatrix}.$$

則$T\boldsymbol{v} = T(\sum\limits_j x_j \boldsymbol{b}_j) = \sum\limits_j x_j T\boldsymbol{b}_j = \sum\limits_j x_j (\sum\limits_i a_{ij}\boldsymbol{c}_i) = \sum\limits_j \sum\limits_i a_{ij} x_j \boldsymbol{c}_i = \sum\limits_i (\sum\limits_j a_{ij} x_j) \boldsymbol{c}_i$

$\therefore\ y_i = \sum\limits_j a_{ij}\, x_j\,;\quad i=1,2,...,m.$

②由①可知 $\forall \boldsymbol{v} \in V$, $A\left[\boldsymbol{v}\right]_B = \left[T\right]_C^B \left[\boldsymbol{v}\right]_B$

設 $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$.

$\forall\, j = 1,2,...,n$, 以$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}_j$ 代入上式:

由 $\left[\boldsymbol{b}_j\right]_B = [0, 0,..,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}j\text{位}}}{1}, 0,...,0]^T$

可得 "A的第j行" = " $\left[T \right]_C^B$ 的第j行 "

$\therefore A = \left[T \right]_C^B$.

習題15.1

求出下列各線性映射對標準基底的矩陣表示:

①T：$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (3x–y, 2x+4y, 5x–6y)$.

②T：$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, s, t) = (3x–4y+2s–5t, 5x+7y–s–2t)$.

Ans:① $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

16 範例:《坐標公式的運用》

設函數空間$V = \{ ae^{2x}+be^{4x}+ce^{-3x} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$.

若線性映射$T:V \longrightarrow V$對$B = \{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}\}$的矩陣表示 $\left[T \right]_B$ 是

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求$T(3e^{2x}–e^{4x}+4e^{-3x})$.

【解】套用定理15:

$$\because \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$\therefore\ T(3e^{2x}–e^{4x}+4e^{-3x}) = 14e^{2x}+3e^{4x}+11e^{-3x}$

【另解】利用線性條件及矩陣表示的定義:

$$T(3e^{2x}-e^{4x}+4e^{-3x}) = 3Te^{2x}-Te^{4x}+4Te^{-3x} \quad \text{(CH7定義1)}$$
$$= 3(2e^{2x}+e^{-3x})-(-3e^{4x})+4(2e^{2x}+2e^{-3x}) \quad \text{(CH7定義9)}$$
$$= 14e^{2x}+3e^{4x}+11e^{-3x} \quad .$$

習題16.1

接範例16, 求$T(ae^{2x}+be^{4x}+ce^{-3x})$

Ans: $(2a+2c)e^{2x}-3be^{4x}+(a+2c)e^{-3x}$

17 範例:《矩陣表示的轉換》 (台大75電機1(b))

設線性映射$T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, 而$B=\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, $B'=\{\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2'\}$爲$\mathbb{R}^2$的基底,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\,T\,]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

求T對B'的矩陣表示.

【解】(解法三較易掌握. 研習時間不足時可放棄解法一及解法二.)

† [解法一] 《在標準坐標系統之下求解》

由定義9可知：

$$T(\boldsymbol{b}_1) = 1\boldsymbol{b}_1-2\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\boldsymbol{b}_2) = 1\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2) = T\boldsymbol{b}_1-T\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

令 $\begin{cases} T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

可解得$a = 4$, $b = –4$, $c = 2$, $d = –1$.

$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$爲所求. (定義9)

† [解法二] 《在B系統之下求解》

$\because \boldsymbol{b}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$

$\therefore [\boldsymbol{b}_1']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (CH6定義28)

設 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$,

則 $\begin{cases} T(\boldsymbol{b}_1') = p\,\boldsymbol{b}_1' + q\,\boldsymbol{b}_2' \\ T(\boldsymbol{b}_2') = r\,\boldsymbol{b}_1' + s\,\boldsymbol{b}_2' \end{cases}$ (定義9)

在B坐標系下觀察(由定理15及CH6定理32③)可得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \end{cases}$$

由上式可解得 $\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$.

[解法三] (套用定理19求解)

$\because$ $\boldsymbol{b}_1' = 1\boldsymbol{b}_1+(-1)\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_2' = 1\boldsymbol{b}_1+0\,\boldsymbol{b}_2$.

$\therefore$ 由B對B'的描述矩陣 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (CH6定義3)

$\therefore$ $[\,T\,]_{B'} = P^{-1}[\,T\,]_B\,P$ (CH7定理19)

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

習題17.1

接本範例，求T對標準基底的矩陣表示. Ans: $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18 範例:《矩陣表示的轉換》

設 $S=\left\{\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}, B=\left\{\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}.$

線性映射T：$\mathbb{R}^{2\times1}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times1}$ 藉著B描寫如下:

$$\text{若}\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\ \text{則}\ \begin{bmatrix}T\boldsymbol{v}\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}3x-5y\\2x+y\end{bmatrix}.$$

①求T對B的矩陣表示.

②求T對S的矩陣表示.

③求 $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$的公式.

【要訣】(1) 注意:

$$\begin{bmatrix}v\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\ \text{和}\ v=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\quad\text{是兩回事!}$$

(2) 要弄清楚所給的坐標映射公式是在什麼系統之下才不會做錯.

【誤解】①

$$T(\boldsymbol{b}_1)=T(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}3\cdot1-5\cdot1\\2\cdot1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

.... 已經錯了! 把錯誤找出來!

【解】①

$$\begin{bmatrix}T\boldsymbol{v}\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}3x-5y\\2x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-5\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-5\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\end{bmatrix}_B$$

$$\therefore \left[T\right]_B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(定理15②)}$$

②（ 若研讀時間不足，可放棄②中的解法一，解法二.）

† [解法一] 《在B系統之下求解》

$\boldsymbol{i} = 1\boldsymbol{b}_1+(-1)\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{j} = 0\boldsymbol{b}_1+1\boldsymbol{b}_2$.

$$\therefore \left[\boldsymbol{i}\right]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{j}\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(CH6定義28)}$$

令 $\begin{cases} T(\boldsymbol{i}) = a\,\boldsymbol{i}+b\,\boldsymbol{j}\,, \\ T(\boldsymbol{j}) = c\,\boldsymbol{i}+d\,\boldsymbol{j}\,. \end{cases}$

由CH6定理32③及CH7定理15①:

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[T(\boldsymbol{i})\right]_B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[T(\boldsymbol{j})\right]_B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可解方程式求得$a = 8$, $b = 9$, $c = -5$, $d = -4$.

$$\therefore \left[T\right]_S = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{(CH7定義)}$$

† [解法二] 《在標準系統S之下求解》

由①及定義9可知

$$T\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad T\boldsymbol{b}_2 = -5\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$T(\boldsymbol{i}) = T(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2) = T\boldsymbol{b}_1-T\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = 8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}$$

$$T(\boldsymbol{j}) = T(\boldsymbol{b}_2) = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix} = (-5)\boldsymbol{i}+(-4)\boldsymbol{j}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}. \qquad \text{(由定義9)}$$

[解法三] 《套用定理19》

$\boldsymbol{b}_1 = 1\boldsymbol{i}+1\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}_2 = 0\boldsymbol{i}+1\boldsymbol{j}$.

∴ 由S到B的基底關係矩陣爲 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

由定理19,

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

可解得 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$

③ 在標準座標下計算:

設 $\boldsymbol{v} = [x \quad y]^{\mathrm{T}}$.

$T(\boldsymbol{v}) = [\ T(\boldsymbol{v})\ ]_S$ (CH6定理28a①)

$= [\ T\ ]_S\ [\ \boldsymbol{v}\ ]_S$ (定理15①)

$= [\ T\ ]_S\ \boldsymbol{v}$ (CH6定理28a①)

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x-5y \\ 9x-4y \end{bmatrix}$$

◎**19** 定理:《矩陣表示的換底公式I (線性算子適用)》

① 設V爲佈於K的向量空間. $B=\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n\}$, $B'=\{\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', ..., \boldsymbol{b}_n'\}$爲$V$的基底.
設$n\times n$矩陣P的第j行是 $[\,\boldsymbol{b}_j'\,]_B$, $j=1,2,...,n$.
則對線性算子$T : V \longrightarrow V$, $[\,T\,]_{B'} = P^{-1}[\,T\,]_B\,P$.

② 設$A\in K^{n\times n}$, $T : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{n\times 1}$, $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$. 對$K^{n\times 1}$的基底$B'=\{\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', ..., \boldsymbol{b}_n'\}$,
將$\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', ..., \boldsymbol{b}_n'$拼成$n\times n$矩陣$P$, 則 $[\,T\,]_{B'}=P^{-1}AP$.

【要訣】(1) 本定理①的P就是由B對B'的描述矩陣.
本定理②的P就是由S對B'的描述矩陣.

(2) 本定理也可寫爲 $P\,[\,T\,]_{B'} = [\,T\,]_B\,P$, 或 $[\,T\,]_B = P[\,T\,]_{B'}P^{-1}$

(3) 記憶圖:

$$\begin{tikzcd} B' & \bigcirc \arrow[r, "左乘{[\,T\,]_{B'}}"] \arrow[d, "左乘P"] & \bigcirc \arrow[d, "左乘P"] \\ B \arrow[u, dotted, "P"] & \bigcirc \arrow[r, "左乘{[\,T\,]_B}"'] & \bigcirc \end{tikzcd}$$

(4) 使用本定理前必須先熟習CH6定理33, CH6範例34.

† (5) $P = \left[\, I \,\right]_B^{B'}$, I是V上的恆等映射. (此式初學者不宜)

† (6)本定理又可寫爲

$$\left[\, T \,\right]_{B'}^{B'} = \left(\left[\, I \,\right]_B^{B'} \right)^{-1} \left[\, T \,\right]_B^B \left[\, I \,\right]_B^{B'}.$$ (此式初學者不宜)

∗ (7)本定理其實只是在$\mathscr{B}$系統下觀察基底$\mathscr{B}'$的行爲(證法一).

† 【證】①[證法一]

令 $[\,T\,]_{B'} = [\,a_{ij}\,]_{n\times n}$

$\forall\, j = 1, 2, ..., n$

$\because\ T(\boldsymbol{b}_j') = \sum_i a_{ij}\boldsymbol{b}_i'$ (CH7定義9)

$\therefore\ [\,T(\boldsymbol{b}_j')\,]_B = \sum_i a_{ij}[\,\boldsymbol{b}_i'\,]_B$ (CH6定理32③)

$\therefore\ [\,T\,]_B\,[\,\boldsymbol{b}_j'\,]_B = \sum a_{ij}[\,\boldsymbol{b}_i'\,]_B$ (CH7定理15)

$= P\cdot([\,T\,]_{B'}$ 的第j行) (左直切原理)

$\therefore$ $([\,T\,]_B P)$的第j行 $= (P\,[\,T\,]_{B'})$的第j行. (右直切原理)

$\therefore\ [\,T\,]_B\ P = P[\,T\,]_{B'}$

P為由B對B'的描述矩陣. 由CH6定理27c得知P可逆.

再移項即得證.

[證法二] (套用CH6定理33, CH7定理15)

$\forall\, v\in V,\ [\,T\,]_B\ P\,[\,v\,]_{B'} = [\,T\,]_B[\,v\,]_B$

$=[\,T(v)\,]_B\ \ =P[\,T(v)\,]_{B'} =P\,[\,T\,]_{B'}[\,v\,]_{B'}$

$\therefore\ [\,T\,]_B P = P[\,T\,]_{B'}$ 再移項即得證.

② (逢甲87工工[4])

設S為$K^{n\times 1}$的標準基底, 則P為由S對B'的描述矩陣. (CH6定理33)

T對S的矩陣表示為A, (CH7定理9a)

由①即得證.

† 習題19.1

設$B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $B' = \{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$都是$V$的基底,

若 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1'\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_2'\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, 依定義9求 $\begin{bmatrix}\mathrm{I}_V\end{bmatrix}_B^{B'}$.

Ans: $\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$

† 習題19.2 《2×2矩陣之三角化》

對2×2矩陣A, 及獨立之2×1向量$\boldsymbol{b}_1'$, $\boldsymbol{b}_2'$. 設$A\boldsymbol{b}_1'=\alpha\boldsymbol{b}_1'$, $A\boldsymbol{b}_2'=\beta\boldsymbol{b}_1'+\gamma\boldsymbol{b}_2'$.

若將$\boldsymbol{b}_1'$, $\boldsymbol{b}_2'$排成矩陣P. 證明 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}$

20 範例:《矩陣表示的轉換》 (清大73資科[2]) (清大72資科[3])

$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ is the corresponding matrix of a linear transformation A from $\mathbb{R}^3$ into $\mathbb{R}^3$ with respect to the basis $\boldsymbol{v}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3=(0,0,1)$. Find the corresponding matrices of A with respect to the following bases respectively.

① $\boldsymbol{u}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2=(0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3=(0,0,1)$

② $\boldsymbol{u}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{u}_2=(1,2,0)$, $\boldsymbol{u}_3=(1,2,1)$

【解】① 由{ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$}對{ $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$}的描述矩陣為

$$\left[\begin{array}{c|c|c}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right] \qquad \text{(CH6定義33)}$$

令所求為 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$, 則由定理19得知

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

由列運算: (CH3範例12a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim\ldots\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ 爲所求.

② 仿①之法可解得

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

習題20.1 (中山81應數Ⅹ[3])

A爲$\mathbb{R}^2$上之一線性變換. 其相對於標準基底之矩陣表示爲 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.求其

相對於基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 之矩陣表示.

Ans: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

21 定義:《相似矩陣》

對$n\times n$矩陣A, B, 若存在可逆$n\times n$矩陣P, 滿足$B = P^{-1}AP$,
則稱A相似(*similar*)於B或稱A與B相似, 常記爲$A \sim B$.

【要訣】(1)列等價, 行等價, 相似, 都常用～表示, 須注意上下文. 在使用時也最好加以說明.

(2)① 對每個A, A相似於A. 《reflexive》

② 若A相似於B, 則B相似於A. 《symmetric》

③ 若A相似於B且B相似於C, 則A相似於C. 《transitive》

這就是說: 相似關係是方陣之間的一種等價(*equivalence*)關係.

(3)A相似於$O \implies A = O$,

A相似於$I \implies A = I$

習題21.1

證明要訣(2), (3).

21a 定理:《相似的幾何意義》

① 對線性算子$T:V \longrightarrow V$, 及V的基底B, B',

若 $[\,T\,]_B = A$, $[\,T\,]_{B'} = A'$, 則A相似於A'.

② 若矩陣A相似於A', 則存在線性算子$T:V \longrightarrow V$及V之基底B, B',

使得$[\,T\,]_B = A$, $[\,T\,]_{B'} = A'$

【要訣】(1)線性算子對各個基底的矩陣表示法之間呈現相似關係.

【證】① 由定理19及定義21即得.

† ② 令$A, A', P \in K^{n\times n}$ 使 $A' = P^{-1}AP$.

令$V = K^{n\times 1}$，並定義$T：V \longrightarrow V$如$T(x) = Ax$.

令B為V的標準基底，則 $[\,T\,]_B = A$. (CH7定理9a)

將P的第j行記為p_j，並令$B' = \{ p_1, p_2, ..., p_n \}$,

$\because$ P可逆， $\therefore$ $\det P \neq 0$, $\therefore$ B'獨立. (CH6定理14)

$\therefore$ B'也是V基底. (CH6定理22①)

而由B對B'的描述矩陣為P. (CH6定義27)

$\therefore$ $[\,T\,]_{B'} = A'$. (CH7定理19)

22 定理:《相似矩陣的性質》 (中央84統計乙[8])

設$A,B \in K^{n\times n}$，若A相似於B，則

①A^k相似於B^k .

②對任意多項式$p(x)$, $p(A)$相似於$p(B)$.

③若A為可逆，則B亦可逆，且A^{-1}相似於B^{-1} .

④$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, $\det A = \det B$.

⑤A^T相似於B^T .

⑥若$K=\mathbb{C}$，則A^H相似於B^H, $\bar{A}$相似於 $\bar{B}$.

【要訣】對多項式$p(x)$及任意方陣A，及可逆矩陣P，必 $P^{-1}p(A)P = p(P^{-1}AP)$

【證】令$B = P^{-1}AP$

①$B^k = (P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)...(P^{-1}AP) = ...$(對消)$= P^{-1}A\,P^k$

$\therefore A^k$相似於B^k .

②令$p(x) = \sum a_i\, x^i$

則 $p(B) = \sum a_i B^i = \sum a_i (P^{-1}A^iP) = \sum P^{-1}(a_i\,A^i)P = P^{-1}(\sum a_i A^i)P = P^{-1}p(A)P.$

$\therefore$ $p(A)$相似於$p(B)$.

③讀者自證.

④ $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}A$

$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1}\det A \det P = \det A$

⑤ $B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T\,A^T\,(P^{-1})^T = P^T\,A^T\,(P^T)^{-1}$

習題22.1 (原習題22.1改編爲定理21a)

證明本定理③.

習題22.2

設A爲可逆方陣, 證明對任意方陣B, 必AB相似於BA. (一句就證完)

23 範例:《相似性的判別》

對 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$

證明 ① A相似於B, ② C與D不相似.

【要訣】(1) A相似於B時, 使$B=P^{-1}AP$的P並不唯一.

(2) 相似性的判別在CH15有進一步的討論.

【解】① 試解P使$B=P^{-1}AP$, 即解 $AP=PB$. (定義21)

設 $P=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -b\\ c & -d\end{bmatrix}$$

比較各位置得: $c=a, \quad d=-b$.

$$\therefore P=\begin{bmatrix}a & b\\ a & -b\end{bmatrix}$$

取$a = b = 1$, 則$\det P \neq 0$ $\therefore P$可逆, (CH4定理17)

$\therefore$ $B = P^{-1}AP$.

故得證A相似於B.

② 試解可逆矩陣P使$D = P^{-1}CP$,

設 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 由 $CP = PD$, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

比較各位置得: a=0, b=0, c=0.

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\det P = 0$,

$\therefore$ P不可逆, 此與條件不合. (CH4定理17)

$\therefore$ C, D不相似.

② [另解] 顯然$\mathrm{tr}C \neq \mathrm{tr}D$, $\therefore$ C, D不相似. (CH7定理22)

習題23.1 (清大73資料[3])

Prove that matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ is similar to matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

† 習題23.2

試舉例說明在A相似於B時, AX未必相似於BX.

$$\text{Ans: 取}A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

24 **定理**:《矩陣表示的換底公式II(線性映射適用)》

設$B=\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, $B'=\{\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', \ldots, \boldsymbol{b}_n'\}$是$V$的基底,

$n\times n$矩陣P的第j行是$[\,\boldsymbol{b}_j'\,]_B$, $j=1,2,\ldots,n$.

$C=\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$, $C'=\{\boldsymbol{c}_1', \boldsymbol{c}_2', \ldots, \boldsymbol{c}_m'\}$是$W$的基底,

$m\times m$矩陣Q的第j行是$[\,\boldsymbol{c}_j'\,]_C$, $j=1,2,\ldots,m$.

則對線性映射$T: V\longrightarrow W$, $\left[T\right]_{C'}^{B'}=Q^{-1}\left[T\right]_{C}^{B}P$.

【要訣】(1) P就是由B對B'的描述矩陣. Q就是由C對C'的描述矩陣.

(2)本定理可寫為

$$Q\left[T\right]_{C'}^{B'}=\left[T\right]_{C}^{B}P\ .\qquad \left[T\right]_{C}^{B}=Q\left[T\right]_{C'}^{B'}P^{-1}\ .$$

(3) 記憶圖:

$$\begin{tikzcd} B' & \bigcirc \arrow[r, "\text{左乘}\left[T\right]_{C'}^{B'}"] \arrow[d, "\text{左乘}P"] & \bigcirc \arrow[d, "\text{左乘}Q"] & C' \\ B \arrow[u, dotted, "P"'] & \bigcirc \arrow[r, "\text{左乘}\left[T\right]_{C}^{B}"'] & \bigcirc & C \arrow[u, dotted, "Q"'] \end{tikzcd}$$

(4) 定理19是定理24的特例, 但定理19較重要.

使用定理24前必須先熟習CH6定理33, CH6範例34.

† (5) $P=\left[I_V\right]_B^{B'}$, $Q=\left[I_W\right]_C^{C'}$. (此式初學者不宜)

† (6)本定理又可寫為

$$\left[T\right]_{C'}^{B'}=\left(\left[I_W\right]_C^{C'}\right)^{-1}\left[T\right]_C^B\left[I_V\right]_B^{B'}$$ (此式初學者不宜)

† 【證】讀者仿定理19自證.

習題24.1

證明本定理.

25 範例:《矩陣表示的轉換》 (清大74計管[2(b)])

Let $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ be the linear transformation defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, 2x_3-x_1)$$

① What is the matrix of T with respect to the standard bases of $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^2$?

② If $B=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ and $B'=\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, where

$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, -1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{u}_1=(0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2=(1, 0)$,

What is the matrix of T relative to the pair B, B' ?

【解】① $T(1, 0, 0) = (1, -1) = 1(1, 0)+(-1)(0, 1)$,

$T(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0)+ 0\,(0, 1)$,

$T(0, 0, 1) = (0, 2) = 0(1, 0)+ 2\,(0, 1)$.

$\therefore T$對標準基底的矩陣表示為 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

② 由定理24得知所求矩陣為:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \dots = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

習題25.1

利用定義9直接做本範例②的部份.

習題25.2

接本範例，若$D = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $D' = \{(1, 1), (1, -1)\}$，利用本範例②的結果和定理24求T相對於D, D'的矩陣表示.

Ans: $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

26 定理:《綜合定理》

對線性映射$T: V \longrightarrow W$，設B, B'為V的基底, C, C'為W的基底, P為由B對B'的描述矩陣, Q為由C對C'的描述矩陣，則

① $\forall\, \boldsymbol{v} \in V$, $[\boldsymbol{v}]_B = P\,[\boldsymbol{v}]_{B'}$ (前三角面)

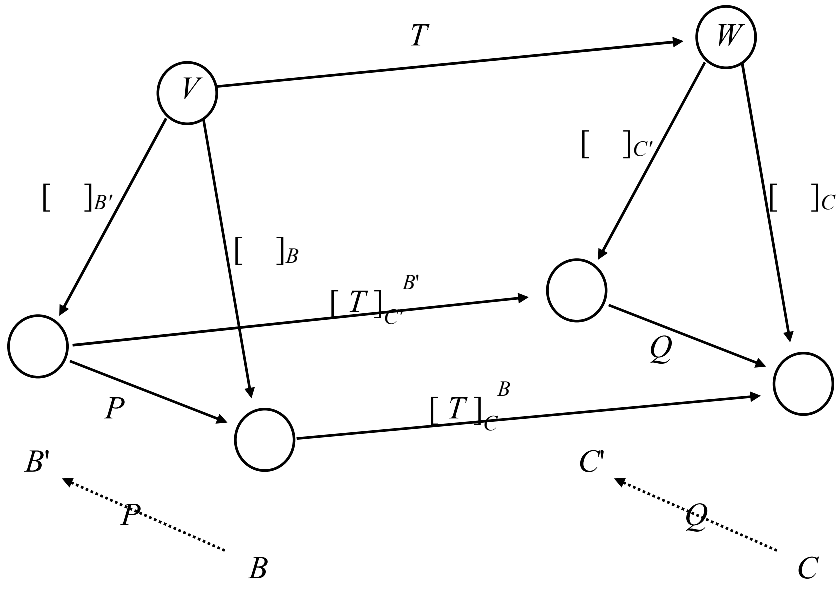
② $\forall\, \boldsymbol{w} \in W$, $[\boldsymbol{w}]_C = Q\,[\boldsymbol{w}]_{C'}$ (後三角面)

③ $\forall\, \boldsymbol{v} \in V$, $[T\boldsymbol{v}]_C = [T]_C^B\,[\boldsymbol{v}]_B$ (前斜面)

④ $\forall\, \boldsymbol{v} \in V$, $[T\boldsymbol{v}]_{C'} = [T]_{C'}^{B'}\,[\boldsymbol{v}]_{B'}$ (後斜面)

⑤ $[T]_C^B P = Q\,[T]_{C'}^{B'}$ (底面)

【要訣】本定理總結第六章定理33，第七章定理15，第七章定理24(含定理19). 用下述立體圖表示.


T
V
W
[ ]$_{B'}$
[ ]$_B$
[ ]$_{C'}$
[ ]$_C$
$[T]_{C'}^{B'}$
$[T]_C^B$
P
Q
B'
C'
P
Q
B
C