# 題型02A: 矩陣的性質

０２A**01**【 大同84資工[1](a) 】

(a) Show that if $A$ is square, then $A+A^{\mathrm{T}}$ is symmetric.

【解】(a) $(A+A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{TT}}=A^{\mathrm{T}}+A=A+A^{\mathrm{T}}$ (綜線CH2定理23)

０２A**02**【 雲技84工工[7] 】

一個正方矩陣(square matrix) $A$被稱爲對稱(symmetric)，如果$A^{-1}=A$. 試證明如果$B$爲一正方矩陣，則

(a) $BB^{\mathrm{T}}$爲對稱. $B^{\mathrm{T}}$爲$B$之轉置(transpose)矩陣. (5%)

(b) $B+B^{\mathrm{T}}$爲對稱. (5%)

【勘誤】symmetric的定義應是$A^{\mathrm{T}}=A$ .

【分析】本考題寫的是中文，用的卻是英文文法. 讀者應自己辨明意義.

【解】(a) $(BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{TT}}B^{\mathrm{T}}$ (綜線CH2定理23)

$=BB^{\mathrm{T}}$, $\therefore$ $BB$ 爲對稱.

(b) $(B+B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{TT}}=B^{\mathrm{T}}+B=B+B^{\mathrm{T}}$ (綜線CH2定理23)

$\therefore$ $B+B^{\mathrm{T}}$ 爲對稱.

０２A**03**【 大同80資工[3](c) 】

True or False:

(c) If $A$ and $B$ are symmetric matrices, then $AB$ is symmetric.

【解】(c) False，反例如下:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

則$$AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

不爲對稱矩陣. (綜線CH2定義25)

０２A**04**【 元智82工工[7] 】

Prove that if $A$ is a skew-symmetric $n\times n$ matrix and $B$ is a symmetric $n\times n$ matrix, then $AB-BA$ is symmetric.

【解】 由已知條件, $A^T=-A, B^T=B$ .

$$\therefore\quad (AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T$$
$$=B(-A)-(-A)B=AB-BA$$

$\therefore$ $AB-BA$ 爲 symmetric

０２A**05**【 交大79工工[6] 】

是非題:

The product of two diagonal matrices is always a diagonal matrix.

【解】是

【討論】本題十分明顯. 若要嚴格證明, 則如下述:

設$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$, $AB=[c_{ik}]$,

若$A$, $B$皆爲對角線矩陣, 則有

$$\begin{cases} i\neq j \implies a_{ij}=0\\ j\neq k \implies b_{jk}=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad c_{ik}=\sum_{J} a_{ij}b_{jk}=a_{ii}b_{ik}$$ (只剩$j$等於$i$的那一項)

$i\neq k$ 時 $c_{ik}=a_{ii}\cdot 0=0$

即$AB$爲對角線矩陣.

０２A**06** 【 中央84資工[1](e) 】

(e) If matrices $AB=AC$, then $B=C$ .

【分析】“ $x=y \Longleftrightarrow Ax=Ay$ ” $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}A=\{o\}$ . (綜線CH5定理7)

【解】(e) False.

$$\text{例如: } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{但 } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

０２A**07** 【 交大84資科[4] 】

Let

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix},$$

and let $B$ and $C$ are 3×3 matrices such that $AB=AC$. What can you conclude about the relationship between $B$ and $C$.

【解】

$$\text{令 } B-C=\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}.$$

$$AB=AC \Longleftrightarrow A(B-C)=O$$

$$\Longleftrightarrow A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=o,\ A\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}=o,\ A\begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}=o.$$

以列運算解$A$的齊次聯立方程式:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $t$爲任意常數.

$\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3u \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$, $u$爲任意常數.

$\begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$, $v$爲任意常數.

亦即:

$$B-C=\begin{bmatrix} -3t & -3u & -3v \\ 0 & 0 & 0 \\ t & u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & u & v \end{bmatrix}$$

其中$t,u,v$爲任意常數.

０２A**08** 【 大同80資工[3](g) 】

True or False:

(g) If $Ax=Ay$, then $x=y$, where $A$ is matrix and $x$ and $y$ are vectors.

【解】(g) False, 反例如下:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

則 $Ax=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=Ay$, 但$x\neq y$ (請參看綜線CH2範例5)

０２A**09** 【 台大77資工[5](iii) 】

True or false, with counterexample if false:

(iii) If $Ax=Ay$ then $x=y$ .

【解】 False, 同上題.

０２A**10** 【 交大81資工[1] 】

Prove that matrix multiplication is associative.

【解】請參閱綜線CH2定理9的證明.

０２A**11** 【 大同80資工[3](a) 】

True or False:

(a) $(AB)^2=A^2B^2$ , where $A$ and $B$ are matrices.

【參考章節】綜線CH2範例5

【解】 False, 反例如下:

$$設A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(AB)^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$$

$$A^2B^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$$

$\therefore\ (AB)^2\neq A^2B^2$

０２A**12**【 交大79工工[7] 】

是非題:

If $A$ and $B$ are $n\times n$ matrices, then $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ .

【參考章節】CH2範例5

【解】非

【討論】反例如下:

取$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$, 則

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}5&2\\2&4\end{bmatrix},$$

$$A^2+2AB+B^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1\\3&4\end{bmatrix}.$$

０２A**13**【 台大84資工[1](bc) 】

[是非論證題]

(b). Let $T$ be a linear transformation: $V\longrightarrow V$, and $T^2=T$, then $T=I$ or $O$ .

(c). $A$, $S$ two $n\times n$ matrix, if $AS=O$, then $SA=O$ .

【分析】(b) 本題考idempotent的性質. 雖以線性映射的面貌出現, 但其實是在

考矩陣. 請參閱綜線CH2範例5.

(c) 熟悉nilpotent將有助於找出反例. 請參閱綜線CH14定義2要訣1.

【解】(b) Disprove.

例如 $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ , $T(x, y)=(x, 0)$ .

則 $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ , $T^2(x, y)=T(x,0)=(x,0)=T(x, y)$

即 $T^2=T$ . 但 $T\neq I$, 且 $T\neq O$ .

(c) Disprove.

例如 $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ ,

但 $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ .

０２A**１４** 【 成大85資工[1] 】

Let $n\geq 1$. Show that if $A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ and $A^{\mathrm{T}}A=O$, then $A=O$.

【解】 設$A=[\,a_{ij}]$ , 則

$$\begin{bmatrix}a_{11}\ \dots\ a_{n1}\\ \dots\dots\dots\\ a_{1n}\ \dots\ a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\ \dots\ a_{1n}\\ \dots\dots\dots\\ a_{n1}\ \dots\ a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0\\ & \dots\dots\dots & \\ 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

比較對角線元素:

$$\begin{cases}a_{11}^2+a_{21}^2+\dots+a_{n1}^2=0\ ,\\ a_{12}^2+a_{22}^2+\dots+a_{n2}^2=0\ ,\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}^2+a_{2n}^2+\dots+a_{nn}^2=0\ ,\end{cases}$$

$\therefore\ \forall\ i,j,\ \ a_{ij}=0$ . 即$A=O$ .

【另解】$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{rank}O=0$ (綜線CH9定理20)

$\therefore\ A = O$ . (綜線CH8定理16⑥)

【討論】本題不必方陣即已成立. 若對複數矩陣, 條件要改成$A^H A = O$ .

０２A15 【 師大83資教[3] 】

Let $A$ be a given $n$ by $n$ matrix. If $B_0$ is an arbitrary $n$ by $n$ matrix, and $B_{k+1} = B_k(3I - AB_k)$ and $\lim_{k\to\infty} B_k = C$, where $C$ is nonsingular, what is $C$ ?

【解】由 $B_{k+1} = B_k(3I - AB_k)$ 取極限:

$$\lim_{k\to\infty} B_{k+1} = (\lim_{k\to\infty} B_k)(3I - A(\lim_{k\to\infty} B_k)),\quad \text{即}\ C = C(3I - AC)\ .$$

已知$C$可逆, 上式兩邊左乘$C^{-1}$, 得 $I = 3I - AC$ .

$\therefore\ AC = 2I$

上式兩邊右乘$C^{-1}$, 得 $A = 2C^{-1}$ .

$\therefore\ A$也可逆. $\therefore\ C = 2A^{-1}$ .

# 題型02B: 逆矩陣

**02B01** 【 清大84工工[5] 】

Let $A$ be an invertible matrix. Show that $A$ is unique.

【解】設$B$, $C$都合於$A$的inverse的條件,

即 $AB=BA=I, AC=CA=I$

則 $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$

$\therefore$ $A$的inverse唯一.

**02B02** 【 雲技84工工[8] 】

試證明如果一個正方矩陣(square matrix)$A$爲可逆(invertible), 則其逆矩陣(inverse matrix) 爲唯一(unique).

【解】同上題.

**02B03** 【 元智83工工[5] 】

[是非題]

If $A$ is nonsingular and $B$ is singular, then it is possible for either $AB$ or $BA$ to be nonsingular.

【解】×, 解說如下:

已知$A$可逆, 若$AB$可逆, 則 $B=A^{-1}\ (AB)$也可逆. (綜線CH2定理12)

同樣, 若$BA$可逆, 則 $B=(BA)A^{-1}$ 也可逆.

**02B04** 【 中央85資工[2](f) 】

[是非論證題]

(f) If AB is invertible, then B is invertible.

【分析】請參閱綜線CH2定理12,

【解】(f) F,

例如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可逆, 但 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不可逆.

【討論】本題若加上$A$, $B$爲方陣的條件, 就可成立. (綜線CH3定理20)

02B**05** 【 中央84資工[3] 】

$A$ and $B$ are square matrices. Prove that if either $BA=I$ or $AB=I$, then $A$ and $B$ are invertible, with $B=A^{-1}$ and $A=B^{-1}$ .

【分析】本題考綜線CH3定理19及綜線CH8定理17, 但利用rank或det求證最快.

【解】設$A$,$B$爲$n\times n$矩陣.

若$AB=I$, 則

$n\geq \text{rank}A\geq \text{rank}(AB)=\text{rank}I=n$ (綜線CH8定理15,定理15)

$\therefore$ $\text{rank}A=n$

$\therefore$ $A$可逆. (綜線CH8定理17)

由$AB=I$兩邊左乘$A^{-1}$ 得$B=A^{-1}$ .

其它部份同理可證.

【另解】設$A$,$B$爲$n\times n$矩陣.

若$AB=I$, 則 $\det(AB)=\det I$

$\therefore$ $\det A\det B=1$ (綜線CH4定理6)

$\therefore$ $\det A\neq 0$

$\therefore$ $A$可逆. (綜線CH4定理17)

由$AB=I$兩邊左乘$A^{-1}$ 得$B=A^{-1}$ .

其它部份同理可證.

02B**06** 【 大同82資工[2] 】

Let $A$ be an $n\times n$ matrix. Which of the following statements is wrong ?

a) If $A$ has a left inverse, then $A$ is invertible;

b) if $A$ is invertible, so is $A^{-1}$ ;

c) if $A$ is not invertible, then there exists an $n\times n$ matrix $B$ such that $AB=O$ but $B\neq O$ ;
d) none.

【解】 選 d

【說明】(a) 若 $LA=I$, 兩邊取行列式, 得

$\det L\det A=\det I=1$ (綜線CH4定理6)

$\therefore\ \det A\neq 0$

$\therefore\ A$可逆 (綜線CH4定理17)

(b) $A$可逆時, $AA^{-1}=I, A^{-1}A=I$

$\therefore\ A^{-1}$可逆 ( 以$A$為inverse ) (綜線CH2定義10)

(c) $A$不可逆時, $\ker A\neq\{o\}$ (綜線CH8定理17)

$\therefore\ \exists$ 非零向量$v$使得 $Av=o$

令 $B=[v, v, ..., v]_{n\times n}$

則 $B\neq O$ , 且 $AB=O$ (綜線CH2定理6)

０２B**07** 【 淡江84資工[1] 】

Let $A$ and $B$ denote $n\times n$ invertible matrices. If $A+B$ is invertible, show that $A^{-1}+B^{-1}$ is invertible and find a formula for $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ .

【解】 $A(A+B)^{-1}B(A^{-1}+B^{-1})=A(A+B)^{-1}(BA^{-1}+I)$

$=A(A+B)^{-1}(B+A)A^{-1}=AA^{-1}=I$

同法可證 $(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B=I$

$\therefore\ (A^{-1}+B^{-1})$可逆, 且以$A(A+B)^{-1}B$為其inverse.

０２B**08** 【 中央86資工[1](f) 】

[是非論證題 ]

(f) $A$ is invertible if and only if $A^3$ is invertible.

【解】(f) True.

能算三次方的矩陣必是方陣, 所以可取行列式.

$A$可逆 $\Longleftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ (綜線CH4定理17)

$\Longleftrightarrow$ $(\det A)^3\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ $\det(A^3)\neq 0$ (綜線CH4定理6)

$\Longleftrightarrow$ $A^3$可逆. (綜線CH4定理17)

0 2 B**09** 【 交大86資工[6](b) 】

[是非倒扣題]

If matrix $A$ is invertible, then $(A+A^T)$ is invertible.

【解】False.

例如 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$可逆, 但 $A+A^T=O$, 不可逆.

0 2 B**10** 【 中央84資工[4] 】

The inverse of block matrix $\begin{bmatrix} I & O & O \\ A & I & O \\ B & C & I \end{bmatrix}$ is $\begin{bmatrix} I & O & O \\ X & I & O \\ Y & Z & I \end{bmatrix}$.

Find matrices $X$, $Y$, and $Z$.

【解】 $\begin{bmatrix} I & O & O \\ A & I & O \\ B & C & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O & O \\ X & I & O \\ Y & Z & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix}$

由塊狀乘法得 $A+X=O, B+CX+Y=O, C+Z=O$ .

可解得 $X=-A, Y=CA-B, Z=-C$ .

0 2 B**11** 【 清大79資科[3] 】

Given $A$, $B$, $A^{-1}$ , $B^{-1}$ and $C$, find the multiplicative inverse of

(1) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$

【分析】本題(1)是(2)的特例, (2)爲常考題, 請參閱綜線CH2範例13.

０２B**12** 【 清大79資料[4](2) 】

Prove that every triangular matrix with no nonzero terms on the diagonal has a triangular inverse. (5%)

【勘誤】 with no nonzero terms應改爲with nonzero terms.

【解】 先以數學歸納法證明下列敘述:

設$\Gamma$爲$n\times n$上三角矩陣, 且$\Gamma$的主對角線元素都不爲0,

則$\Gamma$可逆, 且$\Gamma^{-1}$ 爲$n\times n$上三角矩陣.

1° $n=1$時顯然成立.

2° 設$n=k$時成立.

3° 在$n=k+1$時,

對$n\times n$三角矩陣$\Gamma$, 可將$\Gamma$表爲 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$,

其中$A$爲$k\times k$矩陣, $C$爲$k\times 1$矩陣, $O$爲$1\times k$矩陣, $B=[b]$爲$1\times 1$矩陣, 且$b\neq 0$.

由歸納法的假設得知$A$可逆, 且$A^{-1}$爲$k\times k$上三角矩陣.

令$\Gamma' = \begin{bmatrix} A^{-1} & -(1/b)A^{-1}C \\ O & b^{-1} \end{bmatrix}$ (利用CH2範例13)

則$\Gamma'$爲$n\times n$上三角矩陣, 且$\Gamma\,\Gamma' = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & 1 \end{bmatrix} = \Gamma'\Gamma$

故得證.

若$\Gamma$爲下三角矩陣, 且$\Gamma$的主對角線元素都不爲0,

則$\Gamma^t$ 爲上三角矩陣, 且主對角線元素都不爲0.

由前述可得:

$\Gamma^t$ 可逆，且$(\Gamma^t)^{-1}$ 爲$n\times n$上三角矩陣.

$\therefore \Gamma$ 可逆，且$\Gamma^{-1}$爲$n\times n$下三角矩陣. (綜線CH2定理24)

０２B 13 【 清大80資料[4]& 】

Let

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ & 1 & -1 & \cdots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & O & & & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{10\times 10}$$

find the inverse matrix $A^{-1}$ .

【解】

$$令 A_{\rm n}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ & 1 & -1 & \cdots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & O & & & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{\rm n\times n},$$

$B_{\rm n}=[-1,-1,\cdot\ \cdot,-1]\in \mathbb{R}^{1\times \rm n}$.

則 $A_{\rm n+1}=\begin{bmatrix} 1 & B_{\rm n} \\ O & A_{\rm n} \end{bmatrix}$， 其中$O$爲$n\times 1$矩陣 .

令$A_{n+1}^{-1}=\begin{bmatrix} p & Q \\ R & S \end{bmatrix}$,其中$p\in\mathbb{R}, Q\in\mathbb{R}^{1\times n}, R\in\mathbb{R}^{n\times 1}, S\in\mathbb{R}^{n\times n}$

則 $\begin{bmatrix} 1 & B_n \\ O & A_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & Q \\ R & S \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & O \\ O & I \end{bmatrix}$

$\therefore\ p+B_nR=1,\ A_nR=O,\ Q+B_nS=O,\quad A_nS=I$

$\therefore\ R=O, p=1, S=A_n^{-1},\ Q=-B_nA_n^{-1}$

即 $A_{n+1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -B_nA_n^{-1} \\ O & A_n^{-1} \end{bmatrix}$ .....(甲)

由甲式即可逐步得出$A_{10}$:

$A_1^{-1}=[1]^{-1}=[1]$ , $-B_1A_1^{-1}=[1][1]=[1]$

$\therefore\ A_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -B_2A_2^{-1}=[1\quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=[1\quad 2]$

$\therefore\ A_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, -B_3A_3^{-1}=[1\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[1\quad 2\quad 4]$

$\therefore\ A_4^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

. . . . . .

依此類推可得:

$$A^{-1}=A_{10}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【討論】本題在一般情形之公式如下:

$$A_n^{-1}=[b_{jk}]\,;\quad b_{jk}=\begin{cases} 0 & , \ j>k \\ 1 & , \ j=k \\ 2^{k-j-1} & , \ j<k \end{cases}$$

【另解】請參閱第三章

０２Ｂ**１４**【 交大78資工[3] 】

Let $A$ be a matrix and $I$ an identity matrix.

(a) If $A^r-I=O$, for $r$ an integer greater than 1, and if $A-I$ is nonsingular, prove that

$A^{r-1}+A^{r-2}\cdot\cdot\cdot+A=-I$

(b) Show that $A$ has an inverse which is a polynomial in $A$.

【解】(a) $(A-I)(A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+A+I)$

$=A(A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+A+I)-I(A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+A+I)$ (綜線CH2定理16②)

$=(A^r+A^{r-1}+\ldots+A^2+A)-(A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+A+I)$

$=A^r-I=O$

$\therefore \quad (A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+A+I)$

$=(A-I)^{-1}(A-I)(A^{r-1}+A^{r-2}+\ldots+A+I)$

$=(A-I)^{-1}O=O$

$\therefore \quad A^{r-1}+A^{r-2}+\ \ldots\ +A=-I$

(b) 由(a)可知

$-A^{r-1}-A^{r-2}-\ldots-A=I$

$$\therefore \begin{cases} A(-A^{r-2}-A^{r-3}-\ldots-I)=I \\ (-A^{r-2}-A^{r-3}-\ldots-I)A=I \end{cases}$$

$\therefore$ $A$可逆, 且$A^{-1}=-A^{r-2}-A^{r-3}-\ldots-I$

(b) [另解] 由 $A^{r}=I$, 即得知 $A^{-1}=A^{r-1}$

( 但此種解法與命題原意不太一致. )

# 題型02C: 跡的性質

.０２Ｃ**０１**【 大同83資工[1] 】

Let $A$, $B$ be two $n\times n$ matrices. Show that

(a) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ ; (5%)

(b) if $A$ is similar to $B$, then $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$. (5%)

【解】此爲定理, 請參閱綜合線性代數第二章定理28.

０２Ｃ**０２**【 交大82工工[7] 】

The trace of an $n\times n$ matrix $A$, denoted $\mathrm{tr}(A)$, is the sum of its diagonal entries, that is, $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ , show that if $A$ is similar to $B$, then $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$.

【解】 若$A$ is similar to $B$,

即 ∃可逆矩陣$P$使得 $B=P^{-1}AP$ , (綜線CH7定義21)

則 $\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(APP^{-1})$ (綜線CH2定理28)

$=\mathrm{tr}(A)$

０２Ｃ**０３**【 台大78資工[3] 】

If $A$ and $B$ are $n\times n$ complex matrices. Show that $AB-BA=I$ is impossible. Where $I$ be the $n\times n$ identity matrix.

【解】假設此種$A$, $B$存在. 則 $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}I$

$\therefore$ $\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=n$ (綜線CH2定理28①)

但 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ (綜線CH2定理28③)

$\therefore$ $0=n$. 此爲矛盾. $\therefore$ 此種$A$, $B$不存在.

【討論】其實這題須另加條件(例如“$A$爲實數矩陣”)才成立. 對佈於某些field的矩陣, 這題可能不對. 反例如下:

設$K=\mathbb{Z}_2=\{0, 1\}$ (附錄A範例1, 4)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$$

$$AB-BA=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{tr}(AB-BA)=1+1=0$

０２C**04** 【 大同82資工[二4] 】

If $A$, $B$ are $n\times n$ matrices. Show that $AB-BA=I$ is impossible, where $I$ denotes an identity matrix.

【解】 同上題.