題型17A: 範數理論

本題型主要是參考綜合線性代數附錄B.

１７A**01** 【 交大81資工[4](b) 】

True or false, two points for each.

(b) If A is an $m\times n$ matrix with $m>n$, and $A^TA=I$, then $\|UA\|_2=\|U\|_2$ for all $r\times m$ matrix U.

【解】(b) False. 反例如下:

令 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$, $U^TU=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

則 $A^TA=I$, $UA=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$, $(UA)^T(UA)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

實數矩陣X的2-norm為$X^T X$的最大eigenvalue, (綜線附錄B定理23)

$\therefore$ $\|UA\|_2=0$, $\|U\|_2=1$

【討論】1° 本題若修改為 $\|AU\|_2=\|U\|_2$ 則成立. 證明如下:

$(AU)^T(AU)=(U^TA^T)AU=U^T(A^TA)U=U^TIU=U^TU$

$\therefore$ $(AU)^T(AU)$的最大eigenvalue與U^TU的最大eigenvalue相同

$\therefore$ $\|AU\|_2=\|U\|_2$ (綜線CH13範例24)

2° 題目中的$m>n$並無作用.

在 $A^HA=I$ 時,

rank(A)＝rank(A^HA) (綜線CH9定理20)

＝rank(I)＝n (綜線CH6定理23)

$\therefore$ $m\geq n$ (綜線CH8定理15)

3° 實數矩陣若左乘real orthogonal矩陣，它的2–norm不改變.

複數矩陣若左乘unitary矩陣，它的2-norm不改變.

１７A**02** 【 交大80工工[11] 】

定義 $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, A是方陣, x是向量.

(a) 若$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 求 $\|A\| = ?$ (5%)

(b) 若$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 求 $\|A\| = ?$ (5%)

【分析】 $\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = \max\{\|Ax\| / \|x\| \mid x \neq 0\}$. (附錄B定義21)

當 $\|x\| = \sum_i |x_i|$ 時, $\|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ (附錄B定理22)

當 $\|x\| = (\sum_i |x_i|^2)^{1/2}$ 時,

$\|A\| = (A^tA\text{的最大eigenvalue})^{1/2}$ (附錄B定理23)

【解】 (a) $\|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \max\{1+3, 2+4\} = 6$

(b) $A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$

$\det(A^tA - \lambda I) = (\lambda - 25)\lambda$

$\therefore \|A\| = (A^tA\text{的最大eigenvalue})^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

１７A**03** 【 清大80資料[7] 】

Let $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,

(a) compute the matrix norm $\| A \|$, where

$$\| A \| = \max_{x\neq 0} (\| Ax \| / \| x \|) \text{ and } \| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

(b) compute the condition number of matrix A.

【解】 (a) $A^t A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ....(甲)

$$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = (x^t x)^{1/2}$$

$$\| Ax \| = ((Ax)^t (Ax))^{1/2} = (x^t A^t A x)^{1/2} = (x^t I x)^{1/2} \quad \text{(由甲式)}$$

$$= (x^t x)^{1/2} = \| x \|$$

$$\therefore \| A \| = \max_{x\neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \max_{x\neq 0} \frac{\| x \|}{\| x \|} = 1$$

(b) 由甲式可得, $A^t = A^{-1}$

$$\therefore \| A^{-1} x \| = \| A^t x \| = ((A^t x)^t (A^t x))^{1/2}$$

$$= (x^t A A^t x)^{1/2} = (x^t A A^{-1} x)^{1/2} = (x^t x)^{1/2} = \| x \|$$

$$\therefore \| A^{-1} \| = \max_{x\neq 0} \frac{\| A^{-1} x \|}{\| x \|} = \max_{x\neq 0} \frac{\| x \|}{\| x \|} = 1$$

$\therefore$ the condition number of matrix $A = \| A \| \, \| A^{-1} \| = 1$

１７A**04** 【 交大83資工[5] 】

Given $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Determine $\| A \|_1$ and find a vector $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, with $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$, such that $\| Ax \|_1 = \| A \|_1$ (4%)

(b) Determine $\| B \|_2$ and find a vector $y = (y_1, y_2)^T$, with $y_1^2 + y_2^2 = 1$, such that

$\|By\|_2 = \|B\|_2$. (4%)

【解】(a) $\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}| = \max\{8,4,13\} = 13$. (綜線附錄B定理22)

A的最大絕對行和發生在第三行，令 $x=(0, 0, 1)^T$,(綜線附錄B定理22的證明)

則 $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$.

$\|Ax\|_1 = \|(-2, -7, 4)^T\|_1 = |-2| + |-7| + |4| = 13 = \|A\|_1$

(b) $B^TB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$

$\det(B^TB - xI) = (25-x)^2$,

$\therefore \|B\|_2 = \sqrt{25} = 5$. (綜線附錄B定理23)

令 $y=(1, 0)^T$，則$B^TBy = 25y$, (綜線附錄B定理23)

$\|y\|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 = 1$

$\|By\|_2 = \|(3, 4)^T\|_2 = \sqrt{9+16} = 5 = \|B\|_2$

【加強演練】

Determine $\|A\|_\infty$ and find a vector x with $\|x\|_\infty = 1$,

such that $\|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty$.

[解] $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}| = \max\{6, 10, 9\} = 10$. (綜線附錄B定理22)

A的最大絕對列和發生在第三列，令 $x=(-1, 1, -1)^T$,(綜線附錄B定理22的證明)

則 $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = 1$.

$\|Ax\|_\infty = \|(-2, 10, -7)^T\|_\infty = \max\{|-2|, |10|, |-7|\} = 10$

１７A**05** 【 交大83資工[7](a) 】

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Find the condition number (defined over 2-norm) of matrix A. (5%)

【分析】請參閱綜線附錄B定理27.

【解】(a) [解法一] (此法計算複雜)

先求出 $\| A \|_2 = (A^TA\text{的最大特徵值})^{1/2}$,

再求出 $\| A^{-1} \|_2 = ((A^{-1})^T(A^{-1})\text{的最大特徵值})^{1/2}$,

於是可得出 $\text{cond}(A) = \| A \| \ \| A^{-1} \|$.

(a) [解法二]

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 8 & 17 & -8 \\ -4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA - xI) = \begin{vmatrix} 5-x & 8 & -4 \\ 8 & 17-x & -8 \\ -4 & -8 & 5-x \end{vmatrix} = -(x-25)(x-1)^2$$

A^TA的最大特徵值$=25$, A^TA的最小特徵值$=1$.

$$\therefore\ \text{cond}(A) = \sqrt{25/1} = 5$$

(a) [解法三]

$\because A$爲實數對稱矩陣, $\therefore A$可正交對角化.

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 0-x & 2 & -1 \\ 2 & 3-x & -2 \\ -1 & -2 & 0-x \end{vmatrix} = -(x-5)(x+1)^2$$

$$\therefore\ \text{cond}(A) = \frac{\max\{|5|, |-1|, |-1|\}}{\min\{|5|, |-1|, |-1|\}} = 5$$

１７A**06** 【 交大85資工[5] 】

Let

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Find the condition number of matrix A based on ∞-norm.

【解】A的第一列絕對值和爲6，第二列絕對值和爲9，

$\therefore\ \|A\|_\infty = 9$.　　(綜線附錄B定理22)

$$A^{-1} = ... = (1/3)\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = (1/3)\left\|\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\right\|_\infty$$ (綜線附錄B定義1b)

$= (1/3)\max\{5+3,\ \ 4+3\}$　　(綜線附錄B定理22)

$= (1/3)\cdot 8 = 8/3$.

$\therefore$ A的condition number 爲 $9\cdot(8/3) = 24$.　　(綜線附錄B定義25)

１７A**07** 【 清大85資科[4] 】

Let $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$.

Define $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ and define $\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$

Show that $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\}$.

【解】請參閱綜合線性代數附錄B定理22①.

１７A**08** 【 大同86資工[3] 】

Sketch the set of points $(x_1, x_2) = x^T$ in $\mathbb{R}^2$ such that:

(a) $\|x\|_2=1$, (b) $\|x\|_1=1$, (c) $\|x\|_\infty=1$,

where $\|x\|_p$ is defined by $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{2}|x_i|^p)^{1/p}$

【分析】本題定義p-norm的公式只適用於$p<\infty$.

$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|\}$. (綜線附錄B範例2)

【解】本題細節請參閱綜線附錄B範例2a

(a) $\|(x_1,x_2)\|_2=1 \iff x_1^2+x_2^2=1$

圖形爲以(0,0)爲心,半徑1的圓形.

(b) $\|(x_1,x_2)\|_1=1 \iff |x_1|+|x_2|=1$

圖形爲連接(1,0),(0,1),(–1,0),(0,–1)四點的正方形.

(c) $\|(x_1,x_2)\|_\infty=1 \iff \max\{|x_1|,|x_2|\}=1$

圖形爲連接(1,1),(1,–1),(–1,1),(–1,–1)四點的正方形.

題型17B: 同步對角化

本題型主要是參綜合線性代數第八章第三節.

１７B**０１**【 台大81資工[3] 】

Let T and U be self-adjoint operators on a finite-dimensional inner product space V. Then T and U are simultaneously diagonalizable if and only if T and U commute (i.e. $TU=UT$)

【解】[$\Longrightarrow$] (only-if part)

設存在V的基底$\beta=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 使每個v_i 都是T, U的共同eigenvector.

令 $Tv_i=\lambda_i v_i$, $Uv_i=\mu_i v_i$, $i=1,2,\ldots,n$

則對任意$i=1,2,\ldots,n$,

$(TU)(v_i)=T(U(v_i))=T(\mu_i v_i)=\mu_i T(v_i)=\mu_i\lambda_i v_i$

$(UT)(v_i)=U(T(v_i))=U(\lambda_i v_i)=\lambda_i U(v_i)=\lambda_i\mu_i v_i$

$\therefore$ $(TU)(v_i)=(UT)(v_i)$, $i=1, 2,\ldots,n$

但$\{v_1, \ldots, v_n\}$為U之基底.

$\therefore$ $TU=UT$ (綜線CH7習題3.1)

[$\Longleftarrow$] (if part)

我們對$\dim V$進行數學歸納法.

當$\dim V=1$ 時自動成立.

現假設本結果對$\dim V<n$時已成立, 欲證對$\dim V=n$時成立:

self-adjoint operator可以對角化. (綜線CH13定理15)

若T爲單位映射的常數倍, 則任取U的一組eigenvector當做基底即可同時使T, U都對角化. 以下假設T不是單位映射的常數倍.

任取T的eigenvalue λ, 令$W=\mathrm{N}(T-\lambda I)$, 則$1\le\dim W<n$.

[此處N(・)代表null space]

W爲T–invariant且爲U–invariant, [註1]

又T, U在W上仍爲可交換的self-adjoint operator [註2]

由歸納法的假設可知： 存在W的基底B_1,

使B_1中的向量既是T的eigenvector, 也是U的eigenvector.

另外, $W^{\perp}$ 爲T–invariant且爲U–invariant [註3]

同理可知存在$W^{\perp}$的基底B_2 ,

使B_2中的向量既是T的eigenvector, 也是U的eigenvector.

令$B=B_1\cup B_2$, 因$V=W\oplus W^{\perp}$, (綜線CH11定理17)

所以B成爲V的基底, (綜線CH11定理6)

且B由T, U的共同eigenvector構成. 故得證.

[註1] $\forall\ w\in W=\mathrm{N}(T-\lambda I)$,

$(T-\lambda I)(T(w))=((T-\lambda I)\circ T)(w)$

$=(T\circ(T-\lambda I))(w)$ (綜線CH8定理36)

$=T((T-\lambda I)(w))=T(o)=o$

$\therefore\ T(w)\in N(T-\lambda I)$

即$N(T-\lambda I)$爲T–invariant.

$\forall w\in W=\mathrm{N}(T-\lambda I)$,

$(T-\lambda I)(U(w))=((T-\lambda I)\circ U)(w)=(TU-\lambda U))(w)=(UT-\lambda U)(w)$

$=(U\circ(T-\lambda I))(w)=U((T-\lambda I)(w))=U(o)=o$

$\therefore\ U(w)\in N(T-\lambda I)$

即$N(T-\lambda I)$爲U-invariant.

[註2] 1° W爲T–invariant才能將T限制定義域而看成W上的linear operator

W爲U–invariant才能將U限制定義域而看成W上的linear operator

2° T, U在W上當然仍可交換.

3° $\forall\ w_1, w_2\in W$, $\langle T(w_1), w_2\rangle = \langle w_1 , T^*(w_2)\rangle = \langle w_1 , T(w_2)\rangle$

$\therefore$ T在W上仍爲self–adjoint。

4° 同2°之法可證U在W上仍爲self–adjoint。

[註3] $\forall p\in W^{\perp}$,

$\forall w\in W$,

$\langle T(p), w\rangle=\langle p, T(w)\rangle=0$ ($\because\ T(w)\in W$)

$\therefore\ T(p)\in W^{\perp}$

故得證$W^{\perp}$爲T-invariant。

同理可證$W^{\perp}$爲U-invariant。

17B02 【 清大76資料[7](d) 】
Prove or disprove the following statements. (d) If A and B are diagonalizable matrices then there exists an invertible matrix P such that both $P^{-1}AP$ and $P^{-1}BP$ are diagonal are diagonal. (5%)

【解】(d) (disprove)

[解法1]

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

[註: 要使 $AB\neq BA$ 才行.] (綜線CH12定理29)

又 $\det(A-xI)=(x-1)(x-2)$,

$\det(B-xI)=(x-3)(x-4)$

因A的eigenvalue都相異, 所以可對角化. (綜線CH12定理23)

同理, B也可對角化.

現假設存在P, 使$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$, $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{bmatrix}$

λ_1 ,λ_2 爲A的 eigenvalue, μ_1 ,μ_2 爲B的 eigenvalue.

則 $AB=\left(P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}P^{-1}\right)\left(P\begin{bmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{bmatrix}P^{-1}\right)$

$=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1\mu_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\mu_2\end{bmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{bmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}P^{-1}$

$$=P\begin{bmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}P^{-1}=BA$$

但 $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 8\end{bmatrix}$，

$BA=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}$.

此爲矛盾.

[解法2]

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

$\det(A-xI)=(x-1)(x-2)$

$\ker(A-I)=\left\{\begin{bmatrix}t\\ 0\end{bmatrix}\,\middle|\, t\text{爲scalar}\right\}, \ker(A-2I)=\left\{\begin{bmatrix}0\\ t\end{bmatrix}\,\middle|\, t\text{爲scalar}\right\}$

$\det(B-xI)=(x-3)(x-4)$

$\ker(B-3I)=\left\{\begin{bmatrix}t\\ -t\end{bmatrix}\,\middle|\, t\text{爲scalar}\right\}, \ker(B-4I)=\left\{\begin{bmatrix}0\\ t\end{bmatrix}\,\middle|\, t\text{爲scalar}\right\}$

若$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ (或 $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$)

則P中須有一個 column 是3 的 eigenvector, 呈 $\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$ 之形 ($t \neq 0$)

若$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (或 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

則P須由 $\begin{bmatrix} t' \\ 0 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 0 \\ t'' \end{bmatrix}$ 構成 ($t', t'' \neq 0$)

此爲矛盾.

題型17C: 投影, 鏡射, 旋轉 (改編爲題型01A)

題型17D: 幾何問題 (改編爲題型01B)

題型17E: 名詞解釋

本題型分散遍佈全書.

１７E01 【 中央85資工[1] 】

Give the definitions of the following terms (每小題4分)

(a) vector space and subspace.

(b) linear independent and linear depentent vectors.

(c) invertible matrix and elementary matrix.

(d) one-to-one mapping and onto mapping.

(e) similar matrix and diagonalizable matrix.

【解】(a) vector space: (綜線CH5定義3)

對於非空集合V, 及體K.

考慮函數$+:V\times V \to V$, 及$\cdot:K\times V\to V$. (將$+(u,v)$記爲$u+v$, 將$\cdot(c,u)$記爲cu.)

若$+$, $\cdot$滿足下列條件, 則稱$(V,+,\cdot)$爲佈於K的向量空間.

(1) $\forall,w\in V$, $(u+v)+w=u+(v+w)$.

(2) $\exists$, 使$\forall u\in V$, 必$u+\theta=\theta+u=u$.

(3) $\forall u\in V$, $\exists u'\in V$, 使得 $u+u'=u'+u=o$.

(4) $\forall u,v\in V$, $u+v=v+u$.

(5) $\forall a\in K$, $\forall u,v\in V$, $a(u+v)=au+av$.

(6) $\forall a,b\in K$, $\forall u\in V$, $(a+b)u=au+bu$.

(7) $\forall a,b\in K$, $u\in V$, $(ab)u=a(bu)$.

(8) $\forall u\in V$, $1u=u$.

subspace : (綜線CH5定義10)

對向量空間(V, $+$, $\cdot$), 及$S\subseteq V$,

若(S, $+$, $\cdot$)也是向量空間, 就稱(S, $+$, $\cdot$)是(V, $+$, $\cdot$)的子空間.

(b) linear independent and linear dependent vectors (綜線CH6定義9)

設V是佈於體K的向量空間, 對V內的相異向量 $x_1, x_2,..., x_m$

(1) 若$\forall c_1, c_2,..., c_m \in K$, $c_1 x_1 + ... + c_m x_m = o \implies c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$

則稱$x_1, x_2, ... , x_m$ linear independent.

(2) 若$x_1, x_2, ... , x_m$ 不是linear independent, 就稱linear dependent.

(c) invertible matrix (綜線CH2定義10)

對矩陣A, 若存在矩陣B, 使得$AB=I$且$BA=I$,

則稱A爲invertible matrix.

elementary matrix (綜線CH3定義13)

有三種elementary matrix:

(1) 將單位矩陣的某個主對角線元素改成不爲零的數.

(2) 將單位矩陣的某兩列對調.

(3) 將單位矩陣內的某個0改成其它數.

(d) one-to-one mapping (可參看集合論或離散數學的書)

映射(即函數)$f : A \to B$ 若滿足下列條件, 就稱爲one-to-one:

$\forall x, y \in A, f(x)=f(y) \implies x=y$

onto mapping.

映射(即函數)$f : A \to B$ 若滿足下列條件, 就稱爲onto:

$\forall z \in B, \exists x \in A$ 使 $f(x)=y$

(e) similar matrix (綜線CH7定義21)

對方陣A, B, 若存在可逆方陣P, 使$B=P^{-1}AP$, 則稱A相似於B,

也稱A,B相似.

diagonalizable matrix (綜線CH12定義15)

矩陣A若相似於某個對角線矩陣, 就稱A爲diagonalinable matrix.

１７E**02** 【 中央82資電[1](abcd) 】

Explain the following terms:

(a) Cramer's rule and cofactor matrix.
(b) Ill-conditioned and well–conditioned matrix.
(c) Subspace and subset.
(d) Partial and complete pivoting in Gaussian elimination.

【解】(a) 給定n階方陣 $A=[a_{ij}], n>1$.
令A_{ij}爲刪除A中之第i列與第j行所得的$n-1$階方陣,
定義 $\text{cof}_{ij}A=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$, 稱爲A的(i,j)餘因式(cofactor)。
第(i, j)位置爲$\text{cof}_{ij}A$的矩陣稱爲cofactor matrix from A,
(cofactor matrix 的 transpose 稱爲 A 的 classical adjoint)
Cramer's rule 敘述如下:

若聯立方程組 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i;\quad i=1, 2, \ldots, n$

的係數矩陣行列式不爲0, 則此方程組恰有一解如下

$$x_j=\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k \text{cof}_{kj}A}{\det A}\ ,\quad j=1, 2, \ldots, n$$

(b) 考慮方程式 $Ax=b$, 當A或b的小相對改變總是只造成解x的小相對誤差時, 稱此方程式(或矩陣A)爲well–conditioned. 反之, 當A或b的小相對改變可造成解x的大相對誤差時, 稱此方程式(或矩陣A)爲ill-conditioned.

(c) 對集合A, B, 若A內的每個元素都在B內, 就說A是B的subset. 考慮向量空間V, 及V的非空subset S, 若S內的向量經相加或乘任意係數所得的結果都還在S內, 就說S是V的subspace.

(d) 在對分隔矩陣(partitioned matrix)做Gaussian elimination以解方程式時, 爲了提高數值解(numerical solution)的精確度, 有partial pivoting 及complete pivoting兩種選取pivot的方法. 當做到第(i,j)位置預備向下消去時, 普通解法是只要求第(i, j)位置非零就可以了. (請讀者先參閱綜線CH3演算法4a) partial pivoting是找第(p, j)位置, $p\geq i$, 使此時的$|a_{pj}|=\max\{|a_{kj}| : k\geq i\}$, 然後將第$p$列與第$i$列對調, 再向下消去. complete pivoting是找第(p,q)位置, $p\geq i$, $q\geq j$, 使此時的$|a_{pq}|=\max\{|a_{kl}| : k\geq i, l\geq j\}$, 然後將第$p$列與第$i$列對

調，並且還將第q行與第j行對調(行對調代表變數次序重編)．調好後再向下消去. complete pivoting 的數值精確度最好，但計算複雜度太高，實用上通常是採用折衷的partial pivoting.

１７E03 【 成大81資工甲乙[3] 】

Define the following terms:

(a) Markov process (5%) (b) Linear transformation (5%)

【參考章節】(a) Friedberg, Insel, Spence: Linear ALgebra (2ed) p.260

(b) 綜線CH7定義1

【解】(a) 設某系統(system)可能處於某些(有限個或可數無限個的)狀態(state)，我們在離散時刻觀察此系統的狀態變化。若下一時刻將處於何種狀態的機率只與目前狀態有關，而與過去狀態，時間，或其它因素無關，則此系統稱爲Markov process。

(b) 設V, W爲向量空間，函數$T: V \to W$ 若滿足下述性質，就稱爲linear transformation: (綜線CH7定義1)

對任意向量v_1, v_2，及任意純量c_1, c_2, $T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2)$