中央大學87資工所

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章.

題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

**/

請務必按照題號次序寫在答案紙上.

1. (40%) 【中央87資工】

True and False. (一定要有說明或反例)

(a) Two linear systems $Ax=b$ and $Bx=c$ are equivalent then A and B are row equivalent.

(b) If a linear system has no free variables, then it has a unique solution.

(c) A is a square matrix. If linear transformation $x \longmapsto Ax$ is onto, then $x \longmapsto Ax$ is one-to-one.

(d) Let T be a linear transformation from R^3 to R^m. If vectors a, b, c are linearly independent, then $T(a)$, $T(b)$, $T(c)$ are linearly independent.

(e) The nonempty subset of a linear-dependent vector set is linearly dependent.

(f) $n\times m$ matrix A has n distinct eigenvalues if and only if A is diagonalizable.

(g) If matrix A is diagonalizable, then the columns of A are linearly independent.

(h) If $n\times n$ matrix A has n linear-independent eigenvectors, then so do both A^T and A^{-1}.

【勘誤】(f)中的$n\times m$應更正爲$n\times n$，因爲要方陣才能討論eigenvalue.

【分析】本題(a)屬於題型03B.

若$[\ A \mid b\ ]$列等價於$[\ B \mid c\ ]$則$Ax=b$與$Bx=c$爲equivalent(CH3定理5)，其逆不真.

本題(b)屬於題型03B.

本題(c)屬於題型08E.

本題(d)屬於題型08E. 請參閱綜線CH8定理11a,11b.

本題(e)屬於題型06A. 請參閱綜線CH6定義8要訣3.

本題(f)屬於題型12B. 請參閱綜線CH6定理23.

本題(g)屬於題型12B. 請參閱綜線CH14定理2b

本題(h)屬於題型12B. 請參閱綜線CH12定理26a.

【解】(a)F,

A,B未必同高度. 即使同高度, 仍有反例如下:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad b=c=[\,0\quad 0\quad 1\,]^{\mathrm{T}}$$

$Ax=b$ 與 $Bx=c$ 都無解(equivalent), 但顯然A,B不是列等價.

(b)F, 可能是無解.

(c)T,

onto $\Longrightarrow$ rank$A$=n $\Longrightarrow$ 可逆 (CH8定理17)

$\Longrightarrow$ ker$A$=0 $\Longrightarrow$ one-to-one. (CH8定理7)

[討論] 本題若刪除square的條件就變成False.

(d)F,

例如T取成零映射, 則$T(a)$, $T(b)$, $T(c)$都是零向量, 所以不independent.

[討論] 本題若加上one-to-one的條件就變成True.

(e)F,

例如dependent set{ (1, 0), (0, 1), (1,1) }的nonempty subset{ (1, 0), (0, 1) }獨立.

(f)F,

例如2×2單位矩陣可對角化, 但兩個eigenvalue都是1, 不相異.

(g)F,

例如 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 可對角化, 但行向量不是獨立集.

(h)F, 因A^{-1}未必存在. 反例如(g).

[討論] 本題若加上A可逆的條件就變成True.

因此時爲可對角化(CH12定理16), 所以$A=PDP^{-1}$,

所以 $A^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}})^{-1}DP^{\mathrm{T}}$, $A^{-1}=PD^{-1}P^{-1}$.

於是 A^{T}, A^{-1}也都可對角化.

2. (10%)　【中央87資工】

Find the c_1, c_2, and c_3 in the equation

$$c_1\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型03A.　利用左直切展開式(CH2定理6)做較快.

【解】(細節略)

$c_1=3/5$, $c_2=-4/5$, $c_3=1$.

3. (10%)　【中央87資工】

Explain why the linear transformation $T{:}R^{n}\to R^{m}$

(a) is onto, then $n\geq m$.

(b) is one-to-one, then $n\leq m$.

【分析】本題屬於題型08E.

【解】請參閱綜線CH8定理10a. 此處不再重覆.

4. (10%)　【中央87資工】

Find a matrix A such that the transformation $x\longmapsto Ax$ takes $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$ into $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, respectively.

【分析】本題屬於題型07A. 請參閱綜線CH7定理3.

【解】(細節略)

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

5. (10%)　　【中央87資工】

Let A and B be $n\times n$ matrix. Which one of the two statements:

(i) $\det AB=\det A\det B$　and

(ii) $\det(A+B)=\det A+\det B$

is wrong ? What condions on the matrices and matrix addition make the wrong statement to be right ? Note that the "det" is determinant.

【分析】本題屬於題型04A. 請參閱綜線CH4定理6, CH4習題7.2.

【解】(ii)式錯誤. 若A或B有一個為零矩陣時可成立.

此式並沒有簡單又有價值的相等條件.

6. (10%)　　【中央87資工】

Find bases for Row$A$, Col$A$, and Nul$A$, where

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型06C.

【解】A經列運算化為列簡梯陣如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Row$A$的基底取爲{ [1, 0, 2, 1, 0], [0, 1, 1, 2, 0], [0, 0, 0, 0, 1] } (CH6定理23)

(b) pivot在第1,2,5行,

∴ Col$A$的基底取爲{ $[1, 2, 2, 3]^T$, $[1, 3, 3, 1]^T$, $[1, 2, 3, 4]^T$ } (CH6定理24)

(c) Nul$A$={$[-2s-t, -s-2t, s, t, 0]^T$| s, t爲純量 } (CH3範例7)

={$s[-2, -1, 1, 0, 0]^T+t[-1, -2, 0, 1, 0]^T$| s, t爲純量 }

∴ Nul$A$的基底取爲{ $[-2, -1, 1, 0, 0]^T$, $[-1, -2, 0, 1, 0]^T$ }

7. (10%) 【中央87資工】

Find a QR-factorization of matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix},$$

where columns of Q form an orthonormal basis for Col$A$.

【分析】本題屬於題型09D.

【解】(細節略)

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{8} & 1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{8} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{8} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{8} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{8} & 1/2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 0 & \sqrt{8} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$