台灣大學87資工所(&工工所)

科目: 數學　　題號: 289

1　(10%)　【台大87資工】

In R^3, let $P=\{(x, y, z) \mid x+3y-2z=0\}$

(a) T is a reflection of R^3 about P, find $T(x, y, z)$.

(b) T is the projection on P along the line perpendicular to P, find $T(x, y, z)$.

【分析】本題屬於題型17C 請參閱綜線CH1定理12a及附錄D定理13.

【解】P的法向量$w=(1,3,-2)$.

$v=(x, y, z)$對w的正投影為 $((v\cdot w)/(w\cdot w))w=(1/14)(x+3y-2z)(1, 3, -2)$.

(a) $T(x, y, z)=(x, y, z)-2\cdot(1/14)(x+3y-2z)(1, 3, -2)$　(CH1定理12a)

$=(1/7)(6x-3y+2z, -3x-2y+6z, 2x+6y+3z)$

(b) $T(x, y, z)=(x, y, z)-(1/14)(x+3y-2z)(1, 3, -2)$　(CH1定理12a)

$=(1/14)(13x-3y+2z, -3x+5y+6z, 2x+6y+10z)$

【另解】$w=(1,3,-2)$,　$w^Tw=1+9+4=14$,

$$ww^T=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\3 & 9 & -6\\-2 & -6 & 4\end{bmatrix}$$

(a) 對P的正鏡射矩陣為 $I-2(w^Tw)^{-1}(ww^T)$　(附錄D定理13)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - (2/14) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix} = (1/7) \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ T(x, y, z)=(1/7)(6x-3y+2z, -3x-2y+6z, 2x+6y+3z)$

(b) 對P的正投影矩陣爲 $I-(w^Tw)^{-1}(ww^T)$ (附錄D定理13)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - (1/14) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix} = (1/14) \begin{bmatrix} 13 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ T(x, y, z)=(1/14)(13x-3y+2z, -3x+5y+6z, 2x+6y+10z)$

2 (10%) 【台大87資工】

Let the linear system be the following

$x+2y-z=1$

$2x+3y+z=2$

$4x+7y-z=4$

find the solution of this system so that its length is minimal.

【分析】本題屬於題型03A. 求得通解後利用微積分求得最短解.

【解】由列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

此方程式之通解爲

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

令 $Q=x^2+y^2+z^2=(1-5t)^2+(3t)^2+t^2=35t^2-10t+1$

令 $dQ/dt=0$, 即 $70t-10=0$, $\therefore$ $t=1/7$

$\therefore$ 所求爲 $x=2/7, y=3/7, z=1/7$.

3. (15%) 【台大87資工】

Let A be the 5×5 matrix

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_4 \end{bmatrix}$$

find the characteristic polynomial of A, and prove your result.

【分析】本題屬於題型04B.

行列式也可由第一列或第一行降階, 但較麻煩.

【解】 $\det(A-xI)$

$$=\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_4-x \end{vmatrix}$$

(由最下列降階展開)

$$=-\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{vmatrix}+(-a_4-x)\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{vmatrix} - a_4x^4 - x^5$$

(由最下列降階展開)

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{vmatrix} - (-a_3)\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} - a_4x^4 - x^5$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{vmatrix} - a_3x^3 - a_4x^4 - x^5$$

(由最下列降階展開)

$$= -\begin{vmatrix} -x & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} -x & 0 \\ 1 & -x \end{vmatrix} - a_3x^3 - a_4x^4 - x^5$$

$$= -\begin{vmatrix} -x & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{vmatrix} - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - x^5$$

$$= -a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4 - x^5$$

4. (15%) 【台大87資工】

Let V be a finite-dimensional vector space and $T: V \longrightarrow V$ be linear, and let rank(T)=rank(T^2), prove that

(a) range(T) $\cap$ Ker(T)=$\{o\}$

(b) V=range(T)$\oplus$Ker(T) .

【分析】本題屬於題型11A, 請參閱綜線CH11定理22.

5. (10%), 6. (10%), 7. (20%), 8. (10%). 離散數學