線性代數解析—中正87資工所

廖亦德 解

[1]. (10%) 【中正87資工】

Let P_3 be the set of all polynomials of degree at most three (with real coefficients). The first four Laguerre polynomials are 1, $1-t$, $2-4t+t^2$, and $6-18t+9t^2-t^3$. Show that these polynomials form a basis of P_3.

【分析】本題屬於題型06B. 請參閱綜線CH6範例23a

【解】依同構的觀點, P_3可與R^4互相模擬, (綜線CH8定義27)

此時多項式$a+bt+ct^2+dt^3$可視爲$[a, b, c, d]$. (綜線CH6範例23a)

所給的四個多項式可視爲[1, 0, 0, 0], [1, –1, 0, 0], [2, –4, 1, 0], [6, –18, 9, –1].

此四向量拼成的矩陣經列運算可化爲單位矩陣, (綜線CH3演算法4a)

∴ 此四向量生成R^4. (綜線CH6定理23)

∴ 所給的四個多項式生成P_3.

而$\dim P_3=4$ (因$\{1, t, t^2, t^3\}$爲基底)

∴ 所給的四個多項式行成P_3的基底. (綜線CH6定理22)

[2]. (10%) 【中正87資工】

Show that for any $n>1$ (n is a natural number), the set {1, cos(t}, cos(2t), ..., cos(nt), sin(t), sin(2t), ..., sin(nt) } is orthogonal with respect to the inner product

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt,$$

where $0 \le t \le 2\pi$.

【分析】本題屬於題型09A. 請參閱綜線CH9範例6.

【解】請參閱綜線CH9範例6, 此處不再重覆.

[3]. (10%) 【中正87資工】

Show that the transformation $T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$ has no eigenvalues, while for $T(f(x))=d\,f(x)/dx$ every number is an eigenvalue. The functions are to be defined for all x.

【分析】本題屬於題型12A. 請參閱綜線CH12定義1.

本題需用到常係數線性微分方程式的基本知識, 請參閱綜線CH16範例10要訣1.

【解】[微分算子的部份]

對任意實數k, 解微分方程式 $Df=kf$ 得出通解 $f(x)=ce^{kx}$, c爲常數.

由於 $T(e^{kx}) = k\,e^{kx}$, 所以k爲eigenvalue. (綜線CH12定義1)

[積分算子的部份]

(a) 對非零實數k, 假設非零函數 $f(x)$ 使得 $T(f(x))=kf(x)$, (綜線CH12定義1)

則由定義: $\int_0^x f(t)dt = kf(x)$

兩邊微分得 $f(x)=k\,Df(x)$, (微積分基本定理)

$\therefore$ $Df(x)=(1/k)f(x)$

依此式解微分方程式得出通解 $f(x)=ce^{(1/k)x}$, c爲常數.

而已假設$f(x)$是非零函數, $\therefore c\neq 0$

求算積分, $\int_0^x ce^{(1/k)x}dt = \ldots = kce^{(1/k)x} - kc = kf(x) - kc \neq kf(x)$

$\therefore$ 此種 $f(x)$ 不存在.

(b) 對k=0, 假設非零函數 $f(x)$ 使得 $T(f(x))=kf(x)$, (綜線CH12定義1)

則由定義: $\int_0^x f(t)dt = 0$

兩邊微分得 $f(x)=0$, (微積分基本定理)

$\therefore$ 此種 $f(x)$ 不存在.

[4]. (10%)　【中正87資工】

For an $n\times n$ matrix A, $e^{At}=I+At+(At)^2/2!+(At)^3/3!+...$, where I is the identity matrix.

If $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, compute e^{At}.

【分析】本題屬於題型16B. 請參閱綜線CH16範例6.

【解】先對A做對角化(過程略):　$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-3, -1)$, 其中

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

#

$$\begin{aligned} e^{At} &= \exp(\, t\, P\, \mathrm{diag}(-3, -1)\, P^{-1}) \\ &= \exp(\, P\, \mathrm{diag}(-3t, -t)\, P^{-1}) \\ &= P\, \mathrm{diag}(e^{-3t}, e^{-t})\, P^{-1} \\ &= \text{.... (過程略)} \\ &= (e^{-3t}/2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t}/2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

#

[5]. (10%)　【中正87資工】

Define $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ by $T(x_1, x_2, x_3)=(2x_1+x_2-x_3, x_1-5x_3)$.

(a) Find the matrix representation B with respect to the bases: $B_1=\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ and $B_2=\{(1,0), (0,1)\}$.

(b) Find the matrix representation A with respect to the bases: $B_3=\{(1,0,0), (1,1,1), (0,0,1)\}$ and $B_4=\{(1,-1), (1,1)\}$.

(c) Show that A and B are similar.

【分析】本題(a)(b)屬於題型07B. 請參閱綜線CH7範例12.

本題(c)屬於題型07C. 請參閱綜線CH7定理19, CH7定理24.

【勘誤】對$n\times n$矩陣A, B, 若存在可逆$n\times n$矩陣P, 滿足$B = P^{-1}AP$,
則稱A與B相似. (綜線CH7定義21)
對CH7定理19, 兩個矩陣之間合乎similar的關係.
本題(c)的兩個2×3矩陣之間並非similar, 但考生應依CH7定理24勉強作答.

【補充】對$m\times n$矩陣A, B,
存在可逆之$m\times m$矩陣P及$n\times n$矩陣Q, 滿足$B = P^{-1}AQ \iff$ rank$A$=rank$B$.
(此性質依綜線CH3範例26之法即可證明)

【解】(a) (過程略)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(b) (過程略)

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 2 \\ 3/2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(c) 驗證得知

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 2 \\ 3/2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(綜線CH7定理24)