台灣師大87年資訊教育研究所

1 (6%) 【師大87資教】

Let A be a 2 by 2 matrix. If tr(A)=8 and Det(A)=12, what are the eigenvalues of A ?

【分析】本題屬於題型12A.

【解】$\det(A-xI)=x^2-8x+12$ (綜線CH12定理13)

$=(x-2)(x-6)$,

∴ A的eigenvalue爲2,6.

2 (8%) 【師大87資教】

Classify the following matrices into positive definite, negative definite, and indefinite

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型10C. 請參閱綜線CH10定義19, CH10定理28.

【解】(細節略)

(a) principle minors依序爲+3, +2. 所以是positive definite.

(b) principle minors依序爲+3, –13. 所以是indefinite.

(c) principle minors依序爲–2, 2, –3. 所以是negative definite.

(c) principle minors依序爲1, –3, –4. 所以是indefinite.

【討論】若principle monors有爲0的情形, 就必須用CH13定理17c判定.

3 (10%) 【師大87資教】

Factor the following matrix into a product LDL^T, where L is a lower triangular with 1's on the diagonal and D is a diagonal matrix.

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型03E. 請參閱綜線CH3範例28.

【解】

由列運算, $\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/3)} \sim \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (CH3定理27:LU分解)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (CH3範例13a)

4 (8%) 【師大87資教】

Given the basis $\{(1, 2, -2)^T, (4, 3, 2)^T, (1, 2, 1)^T\}$ for R^3, use the Gram-Schmidt process to obtain an orthonormal basis.

【分析】本題屬於題型09C. 請參閱綜線CH9範例17.

【解】(細節略)

經正交化得出 $\{ (1,2,-2)^T, (10/3, 5/3, 10/3)^T, (-2/3,2/3,1/3)^T \}$ (CH9定理16)

再經單位化得出 $\{ (1/3,2/3,-2/3)^T, (2/3, 1/3, 2/3)^T, (-2/3,2/3,1/3)^T \}$

5 (8%) 【師大87資教】

Determine whether or not the following are linear transformation from $R^{n\times n}$ into $R^{n\times n}$.

(a) $L(A)=2A$ (b) $L(A)=A^T$, (c) $L(A)=A+I$ (d) $L(A)=A-A^T$.

【分析】本題屬於題型07A. 請參閱綜線CH7定義1, CH2定理23, CH7定理2②(a).

【解】(a) Yes. (b) Yes. (c) No. (d) Yes.

6 (10%) 【師大87資教】

Let D be the differentiation operator. Find the matrix A representing D with respect to $[\,1, x, x^2]$ and the matrix B representing D with respect to $[\,1, 2x, 4x^2-2\,]$.

【分析】本題屬於題型07B. 請參閱CH7定義9.

其中B可由A經CH7定理19得出，但在本題這樣算反而較慢.

【解】(細節略)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

7 (10%) 【師大87資教】

Given $A=\begin{bmatrix}1&-1/3&0\\3&-1&0\\4&-4/3&-1/3\end{bmatrix}$, find $3A^{10}+A^9+A^8$.

【分析】本題屬於題型16C.

【解】$\mathrm{ch}(x)=\det(A-xI)=-x^2(x+1/3)$

令$3x^{10}+x^9+x^8=q(x)(-x^2(x+1/3))+ax^2+bx+c$,

以$x=0, -1/3$代入得 $0=c$, $1/3^8=a/9-b/3$

上式微分得 $30x^9+9x^8+8x^7=(\,q(x)(-(x+1/3))\,)'x^2+q(x)(-(x+1/3))2x+2ax+b$,

$\qquad = q_1(x)x+2ax+b$.

以$x=0$代入得 $0=b$,

由以上條件解得 $3x^{10}+x^9+x^8=q(x)\mathrm{ch}(x)+(1/3^6)x^2$

$\therefore\ 3A^{10}+A^9+A^8=O+(1/3^6)A^2$ (CH16定理18)

$$= (1/3^8)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

【另解】(題型16B的解法，本法較困難)(細節略)

先將A化爲Jordan form: $A=PJP^{-1}$,

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

$J=S_2\oplus(-1/3)I_1$,

對$k\geq 2$, $J^k=S_2^k \oplus ((1/3)I_1)^k = O_2\oplus(1/(-3)^k)I_1$ (CH16範例5a)

$\therefore\ 3J^{10}+J^9+J^8 = 3(O_2\oplus(1/3^{10})I_1) + (O_2\oplus(-1/3^9)I_1) + (O_2\oplus(1/3^8)I_1)$

$= O_2\oplus(1/3^8)I_1$

$\therefore\ 3A^{10}+A^9+A^8=P(3J^{10}+J^9+J^8)P^{-1}$ (CH16定理2)

$=P(O_2\oplus(1/3^8)I_1)P^{-1}=$......(答案同上)

8. (10%) 【師大87資教】

Given $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, compute e^{At}.

【分析】本題屬於題型16B. 請參閱綜線CH16範例6.

【解】(細節略)

先將A對角化: $D=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A=PDP^{-1}$.

$e^{At}=P\exp(tD)P^{-1}= P\mathrm{diag}(e^{-2t}, e^{-t})P^{-1}= \ldots$

$$=e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}+e^{-t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

9 (15%) 【師大87資教】

Given $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$,

(a) Show that this is an orthogonal matrix. (5%)

(b) Find A^{-1} . (5%)

(c) Determine if the matrix A is (1) positive definite, (2) positive semidefinite, (3) negative definite, or (4) negitive semidefinite.

【分析】本題(a)(b)屬於題型13A.

本題(c)屬於題型13D. 請參閱綜線CH13定理17c.

【解】(a) 讀者自驗$A^TA=I$.

因A為方陣, $AA^T=I$的部份可由定理得知. 不須重驗. (CH13定理3)

(b) 由(a)得知

$$A^{-1}=A^T=\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(c) 此題非對稱, 所以不正定, 不正半定, 不負定, 不負半定. (CH10定理19c)

(c)[另解] $\det(A-xI)= -(x-1)(x^2-x+1)$, 其eigenvalue為一實數二虛數.

所以不正定, 不正半定, 不負定, 不負半定. (CH13定理17c)

10 (15%) 【師大87資教】

Let A and B be $n\times n$ matrices over the field F. Prove that if $(I-AB)$ is invertible, then

(a) $I-BA$ is invertible; and (7%)

(b) $(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$. (8%)

【分析】本題屬於題型16F.

【解】請參閱綜線CH16定理1. 此處不再重複.

11(15%), 12(10%), 13(15%), 14(10) 離散數學