清華大學87工業工程所

1. (30%)　【清大87工工】

Yes or No (每題3分, 答錯一題倒扣2分, 最高得30分, 最低得0分, 無負分)

(1) A is an m×n matrix. The following statements are always logically equivalent (i.e., both true or both false).

      Statement 1:　The columns of A span $\mathbb{R}^m$

      Statement 2:　A has a pivot position in every row.

(2)
$$u=\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} \text{ and } A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$
u is in the subset of $\mathbb{R}^3$ spanned by the columns of A.

(3) A homogeneous system has a nontrival solution if and only if the system has at least one free variable.

(4) The general solution of $Ax=b$ has the form

$$x=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The solution set is a line in $\mathbb{R}^3$ through $\begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ parallel to $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(5) The solution set in $\mathbb{R}^3$ of $x_1+3x_2-8x_3=0$ is a line passing through the origin.

(6) If v_1, v_2, v_3 and v_4 are linearly independent vectors in $\mathbb{R}^4$, then the set $\{v_1, v_2, v_3\}$ is also linearly independent.

(7) A transformation, $x \longmapsto Ax$, reflects points through the y-axis.　In $\mathbb{R}^2$, A must be

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(8) The vector space $\mathbb{R}^2$ is not a sub-space of $\mathbb{R}^3$.

(9) V is the second quardant in the xy–plane; that is, $V=\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x{\geq}0, y{\leq}0 \right\}$

　　Thus, V is a vector space.

(10) A is a 4×7 matrix and has four pivot columns. Thus, col$A{=}\mathbb{R}^4$ and Nul$A{=}\mathbb{R}^3$.

【分析】本題(1)屬於題型08D.　　本題(2)屬於題型05C.　　　本題(3)屬於題型03B.

　　　　本題(4)屬於題型17D. 本小題題意較模糊. 第一句話應改為 "Suppose that

　　　　the general solution of $Ax{=}b$ has the form ..."

　　　　本題(5)屬於題型17D.　　本題(6)屬於題型06A.　　　本題(7)屬於題型17C.

　　　　本題(8)屬於題型05B.　　本題(9)屬於題型05B.　　　本題(10)屬於題型05C.

【解】(1) Yes.　　CSP(A)=R$^{m{\times}1}$

　　　　　　　　$\Longleftrightarrow$ dim(CSP(A))=m.　　　　　(右推顯然成立, 左推用CH6定理22a)

　　　　　　　　$\Longleftrightarrow$ rank(A)=m　　　　　　　　　(綜線CH8定義13)

　　　　　　　　$\Longleftrightarrow$ A經列運算化到梯形時有m個非零列　　　(綜線CH6定理23)

　　　(2) Yes.　　解 $Ax{=}u$ 得知有(無限多)解,

　　　　　　　　所以$u{\in}$CSPA.　　　　　　　　　　　　　　(綜線CH5定理17)

　　　(3) Yes.　　由解方程式之方法即知.　　　　　　(綜線CH3定理10, 定理11)

　　　(4) No.　　應是through [1 2 3]$^{\mathrm{T}}$, parallel to [1.5, 0, 1]　　　(綜線CH1定義20)

　　　(5) No　　應是plane, 不是line.　　　　　　　　　　(綜線CH1定義19)

　　　(6) Yes.　　可用矛盾證法證明.　　　　　　　　(綜線CH6定義8要訣3)

　　　(7) No　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(參閱綜線附錄D範例7)

　　　應是 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(8) Yes.　　請參閱綜線CH5範例15a.

(9) No.　　請參閱綜線CH5範例12.

(10) No.　dim(CSPA)=dim(RSPA)=4　　　　　(綜線CH6定理23,CH8定理13)

　　　$\therefore$　CSPA=$\mathbb{R}^{4\times 1}$.　　　　　　　　　(綜線CH6定理22a)

　　　但　dim(ker$A$)=7−dim(CSPA)=7−4=3　　　　(綜線CH8定理8)

2.(15%)　【清大87工工】

Use the Gauss-Jordan method to determine whether each of the following linear systems has no solution, a unique solution, or an infinite number of solutions.　Indicate the solution (if any exist).

(a)　$x_1+ x_2　+x_4=3$

　　　$x_2+x_3　=4$

　　$x_1+2x_2+x_3 +x_4=8$

(b)　$x_1+ x_2+x_3 = 4$

　　$x_1+2x_2 = 6$

(c)　$x_1+ x_2 =1$

　　$2x_1+x_2 =3$

　　$3x_1+2x_2 =4$

【分析】本題屬於題型03A.

【解】(細節略)

　　(1)　本題無解.　　　　　　　　　　　(參閱綜線CH3範例8)

　　(2)　$x_1=2-2t$, $x_2=2+t$, t為任意參數.　　　(參閱綜線CH3範例7)

　　(3)　$x_1=2$, $x_2= -1$.　　　　　　　(參閱綜線CH3範例6)

3.(10%)　【清大87工工】

Each year, 20% of all untenured University faculty become tenured(永久職), 5% quit, and 75% remain untenured. Each year, 90% of all tenured faculty remain tenured and 10% quit or retire. Let U_t be the number of untenured faculty at the beginning of year t, and T_t be the number of tenured faculty at the beginning of year t. Use matrix multiplication to relate the vector $[U_{t+1}, T_{t+1}]$ to the vector $[U_t, T_t]$.

【分析】本題屬於題型16E. 請參閱綜線CH16定理範例14.

　　　這題考得太過簡單, 其實可以進一步求算長期的變化.

【解】 由題意得知　$U_{t+1}=0.75U_t$,　$T_{t+1}=0.20U_t+0.90T_t$.

$$[\,U_{t+1},\,T_{t+1}\,] = [\,U_t,\,T_t\,]\begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0.20 & 0.90 \end{bmatrix}$$

---

4. (10%)　【清大87工工】

Let $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

(1) For what value of a,b,c and d will A^{-1} exist ? (5%)

(2) If A^{-1} exist, find it. (5%)

【分析】本題屬於題型03D.

【解】(細節略)

　　(1) ∵ $\det A = abcd$.

　　　∴ a,b,c,d 全不為零 ⟺ A^{-1} 存在.　　　　　　　　(綜線CH4定理17)

　　(2)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(綜線CH3範例12b)

---

5. (15%)　【清大87工工】

(1) A is an $m \times n$ matrix and b is in $\mathbb{R}^m$. Give the following definition:

　" a <u>least-square solution</u> of $Ax=b$"　　(5%)

(2) Find all least-square solutions of the following system. (10%)

$$x+y=2$$
$$x+y=4$$

【分析】本題屬於題型09E.

【解】(1) 請參閱綜線CH9定理21a, 此處不再重覆.

(2)

原方程式爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

normal eqution爲 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$,

解得 $x=3-t, y=t, \quad t \in \mathbb{R}$.

---

6. (20%)　　【清大87工工】

(1) A and B are $n \times n$ matrices. Give the following definitions:

　（ⅰ）<u>characteristic polynomial</u> of A.

　（ⅱ）A is <u>similar</u> to B.　　　　　　　　　　　(10%)

(2) Prove that if $n \times n$ matrices A and B are similar, then they have the same characteristic

　polynomial and hence the same eigenvalues.　　(10%)

【分析】本題屬於題型12A.

【解】(1)（ⅰ）請參閱綜線CH12定義8, 此處不再重覆.

　　　（ⅱ）請參閱綜線CH7定義21, 此處不再重覆.

　(2) 請參閱綜線CH12定理8a的證明, 此處不再重覆.