

# 元智大學88資工所

\*\*\*\*\*

本檔案保留著作權，禁止任何未授權之散佈。

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著：「綜合線性代數」第3章。

題型代表廖亦德著：「線性代數題型剖析」書中的題型。

\*\*\*\*\*/

科目：數學

1. (25%) 【元智88電資】

$$\text{Let } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine all the eigenvalues of  $A$ .
- (b) If possible, find a basis for  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  consisting of eigenvectors of  $A$ .
- (c) If successful in finding a basis, determine an invertible matrix  $Q$  and a diagonal matrix  $D$  such that  $Q^{-1}AQ=D$ .

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例17.

【解】(細節略)

(a)  $\det(A-xI) = -(x-3)^2(x-5)$   
 eigenvalues 為 3, 3, 5

(b) 取3之eigenvector  $[0 \ 1 \ 0]^T, [-1 \ 0 \ 1]^T$ , 及5之eigenvector  $[1 \ 2 \ 1]^T$   
 可形成  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$  的基底.

(c)  $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$  #

**Prove or disprove each of the following:**

2. (25%) [是非論證題] 【元智88電資】

Let  $(A, B)$  be a finite poset and  $B \subseteq A$ . If  $B$  has a lower bound then  $B$  has a greatest lower bound.

【離散數學】本題答案為False.

3. (25%) [是非論證題] 【元智88電資】

Let  $f$  be a function from  $A$  to  $B$  and  $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ .

If  $B_1 = f(A_1)$  then  $A_1 \subseteq f^{-1}(B_1)$ , where  $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$  and  $f^{-1}(B_1) = \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$

【分析】此題雖可列在線代中(綜線CH8定義1要訣5), 但通常算是離散的題目. 本題答案為True.

4. (25%) [是非論證題] 【元智88電資】

Let  $V$  and  $V'$  be two vector spaces and let  $T: V \rightarrow V'$  be linear and one-to-one. If  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  is a linear independent subset of  $V$ , then  $\{T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)\}$  is linear independent.

【分析】本題屬於題型08E. 請參閱綜線CH8定理11b.

【解】True, 證明如下:

若  $c_1T(x_1) + c_2T(x_2) + \dots + c_nT(x_n) = o$ ,

則  $T(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = o$ , (CH7定義1: 線性條件)

$= T(o)$

由one-to-one 得知  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = o$ .

而已知  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  為 linear independent,

$\therefore c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . (CH6定義9)