

## 中原大學88資工所

/\*\*\*\*\*

本檔案保留著作權，禁止任何未授權之散佈。

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著：「綜合線性代數」第3章。

題型代表廖亦德著：「線性代數題型剖析」書中的題型。

\*\*\*\*\*/

科目：計算機數學

1. (22%) 【中原88資工】

(a) [6%] Construct an LU-decomposition for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

(b) [6%] Find the determinant of  $A$ .

(c) [10%] Find  $A^{-1}$ .

【分析】本題(a)屬於題型03E. 參閱綜線CH3範例28.

本題(b)屬於題型04B. 參閱綜線CH4範例12.

本題(c)屬於題型03D. 參閱綜線CH3範例12b.

其中(a)的計算包含於(c)的前段，所以應先做(c).

【解】(細節略)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 & 1 \end{bmatrix} = L_0 U_0 \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU.
 \end{aligned}$$

$$\text{(b) } \det A = -20$$

$$\text{(c) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -12/5 & 21/20 & -1/2 & -1/5 \\ 16/5 & -23/20 & 1/2 & 3/5 \\ -4/5 & 7/20 & -1/2 & -2/5 \\ 7/5 & -11/20 & 1/2 & 1/5 \end{bmatrix}$$

2.(20%) 【中原88資工】

An  $n \times n$  matrix  $P$  is called an orthogonal matrix if  $P$  is invertible and  $P^{-1} = P^T$ .

$$\text{Let } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) [6%] Show that the columns of  $P$  are orthonormal.
- (b) [8%] Find the eigenvalues of  $A$  and corresponding eigenvectors.
- (c) [6%] Find an orthogonal matrix  $P$  such that  $P^{-1}AP$  is diagonal.

【分析】本題(a)屬於題型13B. 請參閱綜線CH13定理3

本題(b)屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例10.

本題(c)屬於題型13C. 請參閱綜線CH13範例16.

【解】(a) 請參閱綜線CH13定理3作答.

$$(b) \det(A-xI) = -x^3 + 7x^2 - 6x = -x(x-1)(x-6)$$

$\therefore A$ 的eigenvalues為0, 1, 6.

$$A-0I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得0的eigenvector  $k[1 \ -2 \ 1]^T$ ,  $k \neq 0$

$$A-1I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得1的eigenvector  $k[2 \ 1 \ 0]^T$ ,  $k \neq 0$

$$A-6I = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得6的eigenvector  $k[-1 \ 2 \ 5]^T$ ,  $k \neq 0$

(c) 前述之eigenvector單位化後拼成orthonormal matrix  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix},$$

且  $P^{-1}AP = \text{diag}(0, 1, 6)$

3. (a) [6%], (b) [6%] (離散)

4. (a) [6%], (b) [6%], (c) [8%] (離散)

5. [10%] (離散)

6. [8%] (機率)

7. (a) [4%], (b) [4%] (機率)