交通大學88資工所

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章.
題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.
***/

科目: 離散數學與線性代數

1. (9%)　【交大88資工】

Let S: $P_2 \to \mathbb{R}^4$ be a linear transformation given by $S(a+bx+cx^2) = (c, a-b, 0, 4a)$

(a) (3%) Find the matrix that represents S with respect to the standard bases for P_2 and R^4.

(b) (3%) Find the dimension of the kernel of S. Is S one-to-one ?

(c) (3%) Find the dimension of the image of S. Is S onto ?

【分析】本題(a)屬於題型07B. 請參閱綜線CH7定義9.

本題(b)(c)屬於題型08A. 請參閱綜線CH8定理7,CH8定理8.

【解】(a) $S(1)=(0, 1, 0, 4)=0(1,0,0,0)+1(0,1,0,0)+0(0,0,1,0)+4(0,0,0,1)$

$S(x)=(0, -1, 0, 0)=0(1,0,0,0)-1(0,1,0,0)+0(0,0,1,0)+0(0,0,0,1)$

$S(x^2)=(1, 0, 0, 0)=1(1,0,0,0)+0(0,1,0,0)+0(0,0,1,0)+0(0,0,0,1)$

$\therefore$ 所求為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　(CH7定義9)

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{列運算}}{\sim \cdots\cdots \sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \ \ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$\therefore$ dim(ker(S))=0,

且得知S爲one-to-one. (CH8定理7)

(c) dim(Im(S))=dim(P_2)–dim(ker(S))=3–0=3

dim(Im(S)) ≤ dim($\mathbb{R}^4$), $\therefore$ S非onto.

2. (10%) 【交大88資工】

(a) (6%) Find a LU-decomposition of PA, where P is a permutation matrix, and

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) (4%) Use the results from (a) to solve $Ax=b$, where $b=[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]^T$.

【分析】本題屬於題型03E. 請參閱綜線CH3範例30.

【解】(a)

$$\begin{bmatrix}2&1&3&2\\2&1&-1&1\\0&3&-2&1\\2&1&2&2\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \leftarrow\\ \\ \leftarrow\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}2&1&3&2\\0&0&-4&-1\\0&3&-2&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow\\ \\ (-4)\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\longleftarrow l_1\\ \longleftarrow l_4\\ \longleftarrow l_2\\ \longleftarrow l_3\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}2&1&3&2\\0&0&0&-1\\0&3&-2&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\underset{(\text{左乘}P)}{\sim\ \cdots\ \sim}\begin{bmatrix}2&1&3&2\\0&3&-2&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}=U_0$$

$$\therefore\ PA=L_0U_0,\quad P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad L_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&4&1\end{bmatrix}.$$

LU分解有兩種定義法, 上述爲一種, 另一種可調整得之:

$$L=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\2&0&-1&0\\2&0&-4&-1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&1/2&3/2&1\\0&1&-2/3&1/3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ PA=LU$$

(綜線CH3範例24a)

(b) 由 $Ax=b$ 化爲 $L_0U_0x=Pb=[1\quad 3\quad 4\quad 2]^T$,

令 $U_0x=y=[\,y_1, y_2, y_3, y_4\,]^T$

將 $L_0\,y=Pb$ 乘開得:

$$y_1=1,\quad y_2=3,\quad y_1+y_3=4,\quad y_1+4y_3+y_4=2\ .$$

解出 $y_1=1, y_2=3, y_3=3, y_4=-11$.

再將 $U_0x=y$ 乘開得:

$2x_1+x_2+3x_3+2x_4=1,\quad 3x_2-2x_3+x_4=3,\quad -x_3=3,\quad -x_4=-11,$

解出 $x_1=-11/3$, $x_2=-14/3$, $x_3=-3$, $x_4=11$.

3. (6%)　【交大88資工】

Let A and B be square matrices of order n, prove that $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

【分析】行列式的定義至少有三種南轅北轍的不同講法, 雖然這些不同的定義最後都可彼此互證等價, 但這就使線代教科書在行列式理論有許多種完全不同的陳述法(approach). 本題所考的行列式乘法定理(綜線CH4定理6), 在不同的教科書就必須引用完全不同的定義與定理來做證明. 本題當作考題, 既未解說採用何種行列式的定義, 又未告知可以引用哪些定理, 考生根本無法作答.

以下提供一種較方便的證法, 但不保證能合於命題者的心意.

【解】先證明兩個輔助定理:

[定理A] 設E爲$n\times n$基本列矩陣, 而B爲$n\times n$矩陣, 則$\det(EB)=\det(E)\det(B)$.

[證] 設r爲基本列運算, 使$r(I)=E$.　(綜線CH3定義13)

case1: 若r爲列對調, 則

$\det(EB)=\det(r(B))=-\det(B)$　(綜線CH3定理15, CH4定理7)

$=\det(E)\det(B)$

case2: 若r將第i列乘k倍, 則

$\det(EB)=\det(r(B))=k\det(B)$　(綜線CH3定理15, CH4定理7)

$=\det(E)\det(B)$

case3: 若r將第i列的k倍加入第j列, 則

$\det(EB)=\det(r(B))=\det(B)$　(綜線CH3定理15, CH4定理7)

$=\det(E)\det(B)$

[定理B] 設R爲$n\times n$列簡梯陣(row-reeduced echelon matrix),

而B爲$n\times n$矩陣, 則$\det(RB)=\det(R)\det(B)$.

[證] case1: 若R含零列, 由矩陣乘法得知RB也含零列.　(CH2定理7①)

$\therefore$ $\det(R)=0$, 且 $\det(RB)=0$.　(CH4定理7)

$\therefore$ $\det(RB)=\det(R)\det(B)$.

case2: 若R不含零列, 則R含有n個非零列,

各列恰有一個pivot, 共有n個pivot分佈在n個行,

∴ $R=I_n$,

∴ $RB=B$, $\det(R)=1$.

∴ $\det(RB)=\det(B)=\det(R)\det(B)$.

以下證明本定理:

將A經列運算化爲$n\times n$列簡梯陣R.

∵ 列運算的各步驟及逆步驟都可用左乘基本列矩陣表示,

∴ $A=E_1E_2\ldots E_kR$, 其中$E_1, E_2, \ldots, E_k$是一些基本列矩陣.

$\det(AB)=\det(E_1E_2\ldots E_kRB)$

$=\det(E_1)\det(E_2\ldots E_kRB)$ ...... (套用定理A)

$=\det(E_1)\det(E_2)\det(E_3\ldots E_kRB)$ ...... (套用定理A)

....

$=\det(E_1)\det(E_2)\ldots.\det(E_k)\det(RB)$ ...... (套用定理A)

另一方面,

$\det(A)\det(B)=\det(E_1E_2\ldots E_kR)\det(B)$

$=\det(E_1)\det(E_2\ldots E_kR)\det(B)$ ...... (套用定理A)

....

$=\det(E_1)\det(E_2)\ldots.\det(E_k)\det(R)\det(B)$ ...... (套用定理A)

再套用定理B即得證.

4. (4%) 【交大88資工】

Let $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ and $b=[3 \quad 2 \quad 1]^T$.

Find a vector p such that $b-p\in N(A^T)$, where $N(A^T)$ is the null space of A^T.

【分析】$N(A^T)=\ker(A^T)=(\mathrm{lker}A)^T=(\mathrm{CSP}A)^\perp$ (CH11定理23)

所以所求的 p是b對CSPA的正投影.

本題屬於題型11C及題型09B. 請參閱綜線CH9定理12.

【解】先設 p爲b對CSPA的正投影.

$\because$ 因A的兩行成比例, $\therefore$ p爲b對$[1 \quad 2 \quad -1]^T$的正投影.

$$\therefore\ p=\frac{p\cdot[1 \quad 2 \quad -1]^T}{[1 \quad 2 \quad -1]^T\cdot[1 \quad 2 \quad -1]^T}[1 \quad 2 \quad -1]^T=[1 \quad 2 \quad -1]^T$$

$A^T(b-p)= \ldots = 0$

$\therefore$ $b-p\in N(A^T)$

5. (11%) 【交大88資工】

Let $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ and $b=[2 \quad 4 \quad 2 \quad 2]^T$.

Find all solution for x that minimize $\| Ax-b \|_2$ using QR-decomposition of A.

【分析】本題屬於題型09D及題型09E. 請參閱綜線CH9定理21a.

【解】(細節略)

A的QR分解爲 (參閱綜線CH9演算法19)

$$Q=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

欲求最小平方解, 解$Rx=Q^Tb$得$x=[13/5 \quad 1/10 \quad -1/4]^T$ #

6. (10%) 【交大88資工】

Consider the linear transformation L taking x in R^3 to $L(x)$ in R^3 by

$$L(x)=(x_1+x_2,\ 2x_2+x_3,\ 3x_3)$$

Find an ordered basis for both the domain and range of L so that the corresponding matrix representation of L is diagonal, and find the matrix representation.

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12定理16.

【解】$L(1,0,0)=(1,0,0)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1)$

$L(0,1,0)=(1,2,0)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+0(0,0,1)$

$L(0,0,1)=(0,1,3)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+3(0,0,1)$

$\therefore$ L對標準基底的矩陣表示爲 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ (CH7定義9)

$\det(A-xI)=\ldots=-(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore$ eigenvalue爲1, 2, 3.

解 $(A-1I)v=o$得A對1的eigenvector $[1, 0, 0]^T$,

解 $(A-2I)v=o$得A對1的eigenvector $[1, 1, 0]^T$,

解 $(A-3I)v=o$得A對1的eigenvector $[1, 2, 2]^T$,

設 $B=\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 2)\}$, 則 $[L]_B=\mathrm{diag}(1, 2, 3)$. #