政治大學88資科所

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章.
題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.
***/

科目: 計算機數學

第一單元(離散60%).　　第二單元(機率40%,線代40%,二科選一科作答).

1. (20%)　【政大88資科】

解聯立方程組

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 - 11x_2 + 18x_3 + 19x_4 = -13 \end{cases}$$

【分析】本題屬於題型03A. 請參閱綜線CH3範例7

【解】(細節略)

分隔矩陣經列運算化爲:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/7 & 1/7 & -2 \\ 0 & 1 & -11/7 & -12/7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

通解爲 $x_1 = -2-(5/7)s-(1/7)t$,　$x_2=(11/7)s+(12/7)t$,　$x_3=s$,　$x_4= t$,

其中s,t爲任意參數.

2. (20%)　【政大88資料】

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 12 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, 求出可逆方陣$P$, 使得$A=PUP^{-1}$,

其中U為上三角矩陣,其對角線值為A之固有值.

【分析】本題為極罕見之題. 請參閱綜線CH13範例11.

【解】$\det(A-xI)=-x^3+5x^2-7x+3=-(x-1)^2(x-3)$

$$A-3I=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \\ 12 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得eigenvector $k[\,-1 \quad 3 \quad 8\,]^T$, $k\neq 0$

$$A-I=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得eigenvector $k[\,-1 \quad 1 \quad 4\,]^T$, $k\neq 0$

令$b_1=[\,-1, 3, 8\,]^T$, $b_2=[\,-1, 1, 4\,]^T$, $b_3=[\,0, 0, 1\,]^T$,

則 $Ab_1=3b_1$, $Ab_2=b_2$, $Ab_3=pb_1+qb_2+b_3$,

上式可解得$p=3/2$, $q=-5/2$.

令$P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

則$P^{-1}AP=U$, 即$A=PUP^{-1}$.