國防管理學院88資訊所

科目: 線性代數

1. (10%) 【國防88資訊】

考慮矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$，求 $\mathrm{adj}A$.

【分析】本題屬於題型04A. 請參閱綜線CH4定義16及CH4定義10.

本題利用 $A\cdot\mathrm{adj}A=(\det A)I$，用解方程式法求解較方便.

【解】(細節略)

由定義解得 $\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

2. (20%) 【國防88資訊】

$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$，求 A之特徵多項式，在複數中之特徵值及特徵向量.

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例17.

【解】(細節略)

特徵多項式爲 $-x^3-5x^2-6x=-x(x+2)(x+3)$

特徵值爲0, –2, –3,

0的特徵向量爲 $k[\,0 \quad -1 \quad 1\,]^{\mathrm{T}}$, $k\neq 0$.

-2的特徵向量為 $k[-2 \quad 1 \quad 0]^T$, $k\neq 0$.

-3的特徵向量為 $k[-1 \quad 0 \quad 1]^T$, $k\neq 0$. #

3. (15%) 【國防88資訊】

考慮$\mathbb{R}^3$的基$\{v_1=(1, -1, 3), v_2=(0, 1, -1), v_3=(0, 3, -2)\}$, 求對偶基$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

【分析】基(basis)通常是譯成基底.

本題屬於題型08F. 請參閱綜線附錄C範例6.

【解】(細節略)

$\phi_1(x, y, z)=x$, $\phi_2(x, y, z)=7x-2y-3z$, $\phi_3(x, y, z)=-2x+y+z$.

4. (35%) 【國防88資訊】

設f是$\mathbb{R}^2$內的雙線性形式, 定義為

$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$

(1) 求 f 在基$\{u_1=(1, 0), u_2=(1, 1)\}$內的矩陣$A$. (8%)

(2) 求 f 在基$\{v_1=(2, 1), v_2=(1, -1)\}$內的矩陣$B$. (7%)

(3) 求從基$\{u_i\}$變換為基$\{v_i\}$的變換矩陣P, 並證明$B=P^{t}AP$. (10%)

【分析】本題屬於題型10A. 請參閱綜線CH10範例9.

依一般的說法, 從$\{u_i\}$到$\{v_i\}$的變換矩陣P應是從$\{v_i\}$到$\{u_i\}$的描述矩陣. (見CH6定義33). 但照本題所要求證明的$B=P^{t}AP$, 這個P卻必須是是從$\{u_i\}$到$\{v_i\}$描述矩陣(CH10定理8). 無論如何, 考生還是以不批評, 委屈作答為原則.

另外, 雙線性形式的矩陣表示有兩種定義法, 之間相差一個轉置. 這點在考卷上最好加上特別說明. 這兩種定義並不影響所求證的公式.(見CH10定理8要訣).

【解】(1) $f(u_1,u_1)=2$, $f(u_1,u_2)=-1$, $f(u_2,u_1)=2$, $f(u_2,u_2)=0$,

$$\therefore\ A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$ [註: 有兩種不同的定義, 之間差一個trnaspose]

(2) $f(v_1,v_1)=3$, $f(v_1,v_2)= 9$, $f(v_2,v_1)=0$, $f(v_2,v_2)=6$,

$$\therefore\ B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$ [註: 有兩種不同的定義, 之間差一個trnaspose]

(3) $v_1=(2,1)=1u_1+1u_2$, $v_2=(1,-1)=2u_1-u_2$

$$\therefore\ P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

讀者自驗$B=P^{T}AP$, 計算式必須呈現在答案卷上. #

5. (30%) 【國防88資訊】

設T爲對稱算子, 試證明

(1). T的特徵多項式$\Delta(t)$ 是$\mathbb{R}$內線多項式的乘積. (10%)

(2). T具有非零特徵向量. (10%)

(3). 屬於相異特徵值的T, 其特徵向量是正交的. (10%)

【分析】本題屬於題型XXX. 請參閱綜線附錄C範例X.

線多項式是指一次多項式.

$T^*=T$ 通常是稱爲self-adjoint operator.

"T爲對稱算子"應修改爲"T爲實內積空間上之對稱算子"

【解】(1) 先證明T的特徵值都是實數: (即綜線CH13定理14(c)①)

設$T(v)=\lambda v$, $v\neq o$.

$\langle T(v), v\rangle=\langle \lambda v, v\rangle=\lambda\,\|v\|$.

$\langle T(v), v\rangle=\langle v, T^*(v)\rangle=\langle v, Tv\rangle=\langle v, \lambda v\rangle=\overline{\lambda}\,\|v\|$.

$\therefore\ \lambda\,\|v\|=\overline{\lambda}\,\|v\|$, $\therefore\ \lambda=\overline{\lambda}$, $\therefore\ \lambda$是實數.

. T的特徵多項式$\Delta(t)$可在$\mathbb{C}$內分解成一次多項式的乘積. (代數基本定理)

即$\Delta(t)=(\lambda_1-t)(\lambda_2-t)\ldots(\lambda_n-t)$.

其中各個λ_i都是T的特徵值, 前面已先證這些λ_i都是實數,

所以$\Delta(t)$可在$\mathbb{R}$內分解成一次多項式的乘積.

(2) 本小題有誤, 反例如下:

設*T*是零算子(將每個向量都映到零向量). 則*T*爲對稱算子.

但*T*的特徵值全是0

若增加"*T*可逆"的條件, 則可依CH14定理2b證明.

(3) 本小題請參閱綜線CH13定理14(c)②.