台南師院88資工所

http://www.cie.ntntc.edu.tw/sm-exam1999.html

科目: 離散數學與線性代數

離散數學

1. (12%), 2. (16%), 3. (10%), 4.(12%)

線性代數

1. (15%) 【南師88資工】

Given a square matrix $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Find e^{At}, $\sin A$, $\cos A$.

【分析】本題屬於題型16B. 本題與綜線CH16範例7同數據.

先將A對角化, 再依綜線CH16定理3求算.

【解】

$$P=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{使 } A=P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$e^{At}=P\begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 2e^{t}-e^{2t} & 2e^{t}-2e^{2t} \\ -e^{t}+e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\sin A=P\begin{bmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 2 \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 2\sin 1-\sin 2 & 2\sin 1-2\sin 2 \\ -\sin 1+\sin 2 & -\sin 1+2\sin 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos A = P\begin{bmatrix} \cos 1 & 0 \\ 0 & \cos 2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2\cos 1 - \cos 2 & 2\cos 1 - 2\cos 2 \\ -\cos 1 + \cos 2 & -\cos 1 + 2\cos 2 \end{bmatrix}$$

2. (12%) 【南師88資工】

Solve the following matrix equation $X^2+6X+9I=\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$, where I is a unit matrix.

【分析】本題屬於題型16E.

【解】 本題即綜線CH16範例16.

3. (13%) 【南師88資工】

Find the eigenvalues and corresponding eigen functions for $(A-\lambda B)x=O$, where

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型16E.

【解】 略, 請參閱綜線CH16範例32.

4. (10%) 【南師88資工】

Diagonalize the following matrix A. $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

(If A is not diagonalizable, explain why ?)

【分析】本題屬於題型16E.

本題出題不慎或是含有筆誤. 無法用有理數作答.

【解】 $\mathrm{ch}(x)=\det(A-xI)=-(x^3-2x^2-28x+48)$

以有理根判別法得知此多項式無有理根.

$\mathrm{ch}'(x)=-(3x^2-4x-28)$,

由輾轉相除法得知$\mathrm{ch}(x)$與$\mathrm{ch}'(x)$無公因式,

$\therefore$ $\mathrm{ch}(x)$無重根,

$\therefore$ A可對角化.