

中原大學88工工所

科目: 線性代數

1. (10%) 【中原88工工】

Determine whether the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ is invertible, and find its inverse if it is.

【分析】本題屬於題型03D. 請參閱綜線CH3範例12b.

【解】(細節略)

A 可逆, 其inverse為 $\begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix}$

2. (10%) 【中原88工工】

Find the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型08B. 請參閱綜線CH8範例14a.

【解】(細節略)本題經列運算化為梯形後有兩個非零列, \therefore rank為2

3. (10%) 【中原88工工】

If A is 3×3 matrix with $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

find (a) $|A^4|$, (b) $|A^{-1}|$ where $|A^4|$ denote the determinant of A^4 and A^{-1} denotes the inverse of A . (10%)【分析】本題屬於題型04A. 本題不須求出 A .

【解】(細節略)

題目中的兩個矩陣的行列式分別求值, 答案為4及-9.

由行列式乘法定理, 得 $4|A| = -9$, $\therefore |A| = -9/4$,(a) $|A^4| = |A|^4 = (9/4)^4$,(b) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 4/9$

4. (15%) 【中原88工工】

Find the determinant of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型04B. 請參閱綜線CH4範例12.

【解】所求為56. (細節略)

5. (15%) 【中原88工工】

Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例11.

【解】(細節略)

eigenvalue 爲 4, 2, -1.

4 的 eigenvector 爲 $t[8, 5, 2]^T, t \neq 0$.2 的 eigenvector 爲 $t[-2, -3, 2]^T, t \neq 0$.-1 的 eigenvector 爲 $t[-1, 0, 1]^T, t \neq 0$.

6. (25%) 【中原88工工】

Solve the following systems of linear equations:

(a) $3x+4y-5z=19$ (10%)

$-2x-3y+z=5$

$x-5y+4z=-2$

(b) $x+3y-4z-5w=1$ (15%)

$2x-y+3z+2w=-5$

$x-11y+18z+19w=-13$

【分析】本題屬於題型03A. 請參閱綜線CH3範例6,7,8

【解】(a) $x=33/25, y=-121/25, z=-172/25$. (細節略)(b) $x=-2-(5/7)s-(1/7)t, y=1+(11/7)s+(12/7)t, z=s, w=t$, 其中 s, t 爲任意參數.

7. (15%) 【中原88工工】

Suppose $A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 7 & -11 \end{bmatrix}$

(a) Find the matrix P that diagonalizes A (10%)

(b) If $f(x)=3x^2+4x-5$, find $f(A)$. (5%)

【分析】本題(a)屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例17.

本題(b)屬於題型16B. 請參閱綜線CH12定理3.

【解】

$$(a) \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}. \quad (\text{細節略})$$

$$(b) \quad f(A) = P \operatorname{diag}(f(3), f(-5)) P^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & 24 \\ -14 & 62 \end{bmatrix}. \quad (\text{細節略})$$