清華大學88工業工程所

科目: 線性代數

1. (25%) 【清大88工工】

True or False. Justify your answers.

(a). All polynomials of the form $P(t)=a+t^2$, where $a\in\mathbb{R}$, is a subspace of P^n.

(b). A denotes an $m\times n$ matrix. Nul$A$ is the Kernel of the mapping $x\to Ax$.

(c). If B is produced by multiplying row 2 of A by 3, then det$B$=3 det A.

(d). If a partitioned matrix is $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, then $A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}$.

(e).If A is $m\times n$ and rank$A=m$, then the linear transformation $x\to Ax$ is one to one.

【分析】本題(a)屬於題型05B. 本題(b)屬於題型08A. 本題(c)屬於題型04A.
本題(d)屬於題型02A. 本題(e)屬於題型08E.

【解】(a) False. 封閉性不成立, 例如 $(1+t^2)+(2+t^2)=(3+2t^2)$, t^2的係數不再是1.

(b) True. 由定義即得. (綜線CH8定義5, CH5定義19)

(c) True. 此為行列式的基本性質. (綜線CH4定理7)

(d) True. 此由transpose的定義即得. (綜線CH2定義22)

(e) False.

例如$m=2$, $n=3$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, rank$A=m$, 但$A$所造的映射不是one-to-one.

[討論] 本小題若改為rank$A=n$則為True. (綜線CH8定理8, CH8定理7)

2. (15%) 【清大88工工】

In P_2, find the change-of-coordinates matrix from the basis $B=\{1-3t^2, 2+t-5t^2, 1+2t\}$ to the standard basis. Then write t^2 as a linear combination of the polynomials in B.

【分析】本題屬於題型06D.

【解】(細節略)

設標準基底為$S=\{1, t, t^2\}$. 由B到S的座標變換矩陣即為由S到B的描述矩陣P,

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$ (綜線CH6定理33)

t^2的標準座標為$[0\quad 0\quad 1]^T$,

$\therefore$ t^2的B座標為 $P^{-1}[0\quad 0\quad 1]^T=[3, -2, 1]^T$. (綜線CH6定理33)

(驗算 $3(1-3t^2)-2(2+t-5t^2)+(1+2t)=t^2$ 無誤)

3. (10%) 【清大88工工】

Show that if A and B have the same rank, then they are similar.

【分析】本題屬於題型07D. 本題的 if 應是 whether ... or not 的意思.

【解】No. 反例如下:

例如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的rank皆為1, 但trace不等, 因而並不similar.

(綜線CH2定理28)

4. (9%) 【清大88工工】

Let $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Find

(1) The characteristic equation of A; (3%)

(2) The eigenvalues of A; (3%)

(3) The corresponding eigenvectors. (3%)

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例10.

【解】(細節略)

(1) $\det(A-xI)=x^2-3$

(2) eigenvalues為 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{3}$ 的eignenvector為 $t[1 \quad -1+\sqrt{3}\ ]^T$, $t\neq 0$.

$-\sqrt{3}$ 的eignenvector為 $t[1 \quad -1-\sqrt{3}\ ]^T$, $t\neq 0$. #

5. (9%) 【清大88工工】

Let $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Find

(1) The characteristic equation of A; (3%)

(2) The eigenvalues of A; (3%)

(3) The corresponding eigenvectors. (3%)

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例10.

【解】(細節略)

(1) $\det(A-xI)=x^2-x+4$

(2) eigenvalues為 $(1+\sqrt{15}\,i)/2$, $(1-\sqrt{15}\,i)/2$

(3) $(1+\sqrt{15}\,i)/2$ 的eignenvector為 $t[1 \quad (1-\sqrt{15}\,i)/4\ ]^T$, $t\neq 0$.

$(1-\sqrt{15}\,i)/2$ 的eignenvector為 $t[1 \quad (1+\sqrt{15}\,i)/4\ ]^T$, $t\neq 0$. #

6. (9%) 【清大88工工】

Let $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. Are A and B similar? Give the reason why.

【分析】本題屬於題型07D.

【解】$\det(A-xI)=(x-2)(x+1)$, $\det(B-xI)=(x-2)(x+1)$,

A, B皆可對角化為 diag(2, –1). (綜線CH12定理23)

∴ A, B 為similar. (綜線CH15定理14)

7. (9%) 【清大88工工】

Let $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Is A diagonalizable ? Give the reason why.

【分析】本題屬於題型12B. 請參閱綜線CH12範例22.

【解】 $\det(A-xI)=x^2-8x+16=(x-4)^2$,

4的algebraic multiplicity=dim(ker(A–4I))

=2–rank(A–4I)=2–1=1 < 4的algebraic multiplicity

∴ A不可對角化. (綜線CH12定理21)

8. (14%) 【清大88工工】

Let $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, Find

(1) Eigenvalues of A;

(2) Eigenvectors of A.

(3) Is it diagonalizable? If the answer is no, give the reason why.

If the answer is yes, gives its diagonized form and how to reach it.

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例17.

【解】 (1) $\det(A-xI)=(x-1)^2(x+3)$, A的eigenvalue為1,1,–3.

(2) 由$(A-1I)v=o$解得1的eigenvector $[s-t, s, t]^T$, s, t不全為0.

由$(A+3I)v=o$解得–3的eigenvector $[t, 3t, t]^T$, t不為0.

(3) 可對角化:

令 $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$， 則$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$