# 雲林科技大學88工業工程所

科目: 微積分與線性代數

1. -- 5. (50%) (微積分).

6. (10%) 【雲科88工工】

Given a matrix $A$, where

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors. (4%)

(b) Find a matrix $P$ that diagonalizes $A$, that is, $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. (3%)

(c) $P^{-1}AP$= ? (3%)

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例17.

【解】(細節略)

(a) eigenvalue為2,2,1.

2的eigenvector為 $t_1[0, 1, 0]^T+t_2[-1,0,1]^T$, $t_1, t_2$不全為0.

1的eigenvector為 $t[-2, 1, 1]^T$, $t$不為0.

(b)

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) diag(2,2,1)

7. (10%) 【雲科88工工】

Find the eigenvalues and bases of $A^{25}$ for

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型16A.

題目中的basis應是指構成$\mathbb{R}^3$的basis的eigenvector.

【解】(細節略)

$A$的eigenvalue爲1,1,–1.

取eigenvector $[-1, 1, 0]^T$, $[-1, 0, 1]^T$, $[2, -1, 1]^T$.

$A^{25}$的eigenvalue爲$1^{25}$,$1^{25}$,$(-1)^{25}$, 即1,1,–1. (綜線CH16定理1a)

8. (10%) 【雲科88工工】

Given a matrix $A$, then find det ($A$)=?

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型04B. 請參閱綜線CH4範例12.

【解】所求行列式爲–240. (細節略)

9. (10%) 【雲科88工工】

Given a matrix $A$, then find $A^{-1}$ =?

$$A=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型03D. 請參閱綜線CH3範例12b.

【解】 將$[\,A \mid I\,]$的左邊化爲$I$, 右邊就是$A^{-1}$: (細節略)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{bmatrix}$$

【另解】設$S_4$爲4階下移矩陣, 則

$A=S_4+kI_4=k(I_4+k^{-1}S_4)$, (綜線CH14定義2)

$A^{-1}=k^{-1}(I_4+k^{-1}S_4)^{-1}$

$=k^{-1}(\,I_4-k^{-1}S_4+k^{-2}S_4^{\,2}-k^{-3}S_4^{\,3}\,)$ (利用$(1+x)^{-1}$的泰勒展開式)

$=k^{-1}I_4-k^{-2}S_4+k^{-3}S_4^{\,2}-k^{-4}S_4^{\,3}$ 即得出上面的答案.

10. (10%) 【雲科88工工】

Given $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

then $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ =?

(Hint: You may use Gaussian elimination or other methods.)

【分析】本題屬於題型03A. 請參閱綜線CH3範例7.

【解】(細節略) 係數矩陣經列運算化爲

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得 $x_1=-s-t$, $x_2=s$, $x_3=-t$, $x_4=0$, $x_5=t$, $s,t$爲任意scalar.