元智大學88工工所(甲組)

科目: 線性代數

1. (20%)　【元智88工工甲】

若M是所有2×2的對稱矩陣所成的向量空間.　試證明

$$S=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$ 是M的一組基底.

【分析】本題屬於題型06B.

【解】[生成] $\forall a,b,c$,

$$\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

[獨立]

若 $x\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

可解得$a=b=c=0$.

2. (30%)　【元智88工工甲】

令集合$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

(a) 證明S是$\mathbb{R}^3$的一組基底 (15%)

(b) 限用Gram-Schmidt過程. 將S轉成直交化(orthogonal)基底. (15%)

【分析】本題(a)屬於題型06B.

本題(b)屬於題型09C. 請參閱綜線CH9範例17

【解】(a) [生成] $\forall a,b,c$,

設 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

經列運算可解得 $x=a/2+b-c/2$, $y=-a/4+b-3c/4$, $z=-a/4+c/4$.

[獨立]

設 $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

經列運算可解得$a=b=c=0$.

(b) 經Gram-Schmidt process後之正交基底爲 (細節略)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

3. (30%) 【元智88工工甲】

令$P_2=\{at^2+bt+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$. 是全部二次多項式所成的集合.

令$L:P_2\to P_2$ 定爲一線性變換 (linear transformation), 其規定如下

$$L(at^2+bt+c)=(a+2b)t+(b+c)$$

試問:

(a) Ker$L$是否含有多項式 $-4t^2+2t-2$？ (10%)

(b) 試求Ker$L$的一組基底. (10%)

(c) 試求Range$L$的一組基底. (10%)

【分析】本題屬於題型08A.

【解】(a) $L(-4t^2+2t-2)=((-4)+2(2))t^2+(2+(-2))=0$

$\therefore$ $-4t^2+2t-2\in$ Ker$L$.

(b) Ker$L=\{at^2+bt+c \mid L(at^2+bt+c)=0\}=\{at^2+bt+c \mid (a+2b)t+(b+c)=0\}$

$=\{at^2+bt+c \mid (a+2b)=0, (b+c)=0\}=\{at^2+bt+c \mid a=2c, b=-c\}$

$=\{(2c)t^2+(-c)t+c \mid c\in\mathbb{R}\}=\{c(2t^2-t+1) \mid c\in\mathbb{R}\}$

可取$\{2t^2-t+1\}$爲Ker$L$的基底.

(c) Range$L=\{L(at^2+bt+c) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}=\{(a+2b)t+(b+c) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$

$=\{pt+q \mid p,q\in\mathbb{R}\}$

可取$\{ t, 1 \}$爲Range$L$的基底.

4. (20%) 【元智88工工甲】

若$A=S_1\Lambda_1S_1^{-1}$ 且 $B=S_2\Lambda_2S_2^{-1}$，其中Λ_1與Λ_2皆是主對角線矩陣. 試證明 $S_1=S_2$ 若且唯若 (if and only if) $AB=BA$.

【分析】本題屬於題型17B. 請參閱綜線CH12定理29.

本題if-part錯誤.

【解】[only-if] $S_1=S_2$時,

$$AB=S_2\Lambda_1S_2^{-1}S_2\Lambda_2S_2^{-1}=S_2\Lambda_1\Lambda_2S_2^{-1}$$

$$= S_2\Lambda_2\Lambda_1S_2^{-1} \qquad \text{(綜線CH2定理4b)}$$

$$= S_2\Lambda_2S_2^{-1}S_2\Lambda_1S_2^{-1}=BA.$$

[if-part] 此部份有誤.

當$AB=BA$時, 未必$S_1=S_2$. 反例如下:

$A=B=\Lambda_1=\Lambda_2=I_2$,

$$S_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$