元智大學88工業工程所(乙組)

科目: 線性代數

1. (36%) 【元智88工工乙】

如右圖一所示, 若b在a上的投影點是P.

(a) (16%) 試求投影向量$\overrightarrow{OP}$？

(b) (20%) 試尋找一矩陣Q使得下述成立

$Qb=\overrightarrow{OP}$ 並且 $Q^2=Q$ [圖一: $b=(b_1, ..., b_n)^T$, $a=(a_1, ..., a_n)^T$ 夾角爲θ]

【分析】本題屬於題型09B. 請參閱綜線CH9定理12.

【解】

(a) $\overrightarrow{OP} = |b|(\cos\theta)\,(a/|a|)= |a||b|(\cos\theta)/(|a|^2)\,a = \dfrac{b \cdot a}{a \cdot a}\,a = \dfrac{b_1a_1+...+b_na_n}{a_1^2+...+a_n^2}\,a$

(b) $\overrightarrow{OP} = \dfrac{a^Tb}{a^Ta}\,a = (a^Ta)^{-1}(a^Tb)a$

$= (a^Ta)^{-1}a(a^Tb)$ (綜線CH2定理5a)

$= (a^Ta)^{-1}(aa^T)b$ (結合律)

取$Q=(a^Ta)^{-1}(aa^T)$即可.

2. (20%)【元智88工工乙】

令矩陣 $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 試求$A^{100}$.

【分析】本題屬於題型16C(或題型16B). 請參閱綜線CH16範例19.

【解】(細節略)

$\det(A-xI)=x^2-6x+5=(x-5)(x-1)$

令$x^{100}=q(x)(x-5)(x-1)+ax+b$,

以x=5, 1代入解得a=$(5^{100}-1)/4$, b=$(5-5^{100})/4$,

$A^{100}=aA+bI_2=\ldots$ (請自行化簡) (Cayley-Hamilton定理)

3. (20%) 【元智88工工乙】

令 $A=A^H$, 其中A^H是A的共軛轉置矩陣(Conjugate transpose). 試證明:

對於任意複數向量x, x^HAx 必是實數.

【分析】本題屬於題型10B. 請參閱綜線CH10定理18.

【解】請參閱綜線CH10定理18的證明. 此處不再重複.

4. (24%) 【元智88工工乙】

令$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. 試列舉三種檢驗法則, 說明本矩陣$A$爲半正定(semidefinite).

(註: 每種法則佔8分, 共計24分)

【分析】本題爲綜合性的考題, 部份屬於題型13D.

注意正半定不能用左上角行列式判別.

【解】(a) 此矩陣已是對稱矩陣, 可以正交對角化. (綜線CH13定理15)

$\det(A-xI)=\ldots=-x^3+6x^2-9x=-x(x-3)^2$.

∴ A的eigenvalue爲3,3,0

因eigenvalue全是≥0, 所以是正半定. (綜線CH13定理17c)

(b) 由列運算,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} (1/2) \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\-1/2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&3/2&-3/2\\0&0&0\end{bmatrix}$$ (LU分解)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\-1/2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3/2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1/2&-1/2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\-1/2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{3/2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&-1/2&-1/2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$=W^TW$,

其中$W=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{3/2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1/2&-1/2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以A是正半定. (綜線CH13定理18a)

(c) $\forall a, b, c\in\mathbb{R}$,

$$[a\quad b\quad c]\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$ (綜線CH10範例2a)

$= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$

所以A是正半定. (綜線CH10定理19c)