清華大學88年統計所

科目: 基礎數學 科號: 0301

1. (10%), 2. (10%), 3. (5%), 4. (10%), 5. (5%), 6. (10%). [微積分]

7. (10%) 【清大88統計】

令 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 解 $AX=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型03A. 請參閱綜線CH3範例7

【解】(細節略)

令$b=[1, 5, 5]^T$, 分隔矩陣 $[\, A \mid b \,]$ 經列運算化為

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\therefore\ X=\begin{bmatrix} -2-3s-t \\ s \\ 1-(1/3)t \\ t \end{bmatrix}$$

8. (20%) 【清大88統計】

5% (a) 何謂正定(positive definite)矩陣, 半正定(positive semi-definite)矩陣 ?

5% (b) 證明半正定矩陣之特徵值(eigenvalue)皆非負.
5% (c) 說明正定矩陣之特徵值及特徵向量之幾何意義.
5% (d) .證明隨機向量之共變異矩陣(covariance matrix)爲半正定.

【分析】(a) 本小題考基本定義, 請參閱綜線CH10定義19,定義19a,CH10定理19c.
(b) 本小題屬於題型12D, 請參閱綜線CH13定理14a.
(c) 本小題屬於題型12D, 請參閱綜線CH13定理15a.
(d) 本小題屬於題型10C. 由於用到機率論, 茲補充定義定理如下:
[定義] 對$m\times n$隨機矩陣$Z=[\ Z_{ij}\ ]_{m\times n}$, Z的期望值矩陣定義爲 $EZ=[\ EZ_{ij}\ ]_{m\times n}$
[定義] 對$n\times 1$隨機向量$Z=[\ Z_1, Z_2, ..., Z_n]^T$, Z的variance-covariance matrix, 簡稱 covarance matrix, 定義爲$\Sigma_Z = E((Z-EZ)(Z-EZ)^T)$
(參閱G.G.Roussas:A First Course in Mathematical Statistics, A-W)
[定理A] 若隨機變數$X \geq 0$, 則$EX \geq 0$
[定理B] 若H爲$p\times q$常數矩陣, Z爲$q\times r$隨機矩陣, K爲$r\times s$常數矩陣, 則
$E(HZK)=H(EZ)K$

【解】(a) 對$n\times n$實數對稱矩陣A, 若 “ $\forall n\times 1$非零實數行向量v, $v^TAv>0$ ”,
則稱A爲positive definite矩陣.
對$n\times n$實數對稱矩陣A, 若 “ $\forall n\times 1$實數行向量v, $v^TAv\geq 0$ ”,
則稱A爲positive semi-definite矩陣.

(b) 設A爲半正定(實數)矩陣, 而λ爲A的特徵值.
取(實數)特徵向量$v\neq o$, 則$Av=\lambda v$.
$\therefore\ v^TAv=v^T\lambda v=\lambda(v^Tv)$
由 $v^TAv\geq 0$ 及 $v^Tv>0$ 即得證 $\lambda\geq 0$.

(c) 實數正定矩陣可正交對角化, 即
存在矩陣U使得$U^{-1}=U^T$, 且$U^{-1}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$.　　(綜線CH13定理15)
此時U的n個行$u_1, u_2, ..., u_n$形成$\mathbb{R}^{n\times 1}$的正交單位基底, 且$Au_j=\lambda_j u_j$.
(對u_j左乘A的效果是長度變爲λ_j倍)
對任意$n\times 1$行向量v, 將v表爲$x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n$, 則
$Av=A(x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n)=x_1Au_1+x_2Au_2+...+x_nAu_n$
$=\lambda_1(x_1u_1)+\lambda_2(x_2u_2)+...+\lambda_n(x_nu_n)$

(d) $\forall n\times 1$實數行向量v,

$v^{\mathrm{T}}\Sigma_Z v = v^{\mathrm{T}}E((Z-EZ)(Z-EZ)^{\mathrm{T}})\,v$

$= E(v^{\mathrm{T}}(Z-EZ)(Z-EZ)^{\mathrm{T}}v)$　　(定理B)

$= E(v^{\mathrm{T}}(Z-EZ)v^{\mathrm{T}}(Z-EZ))$　　($(Z-EZ)^{\mathrm{T}}v$是1×1矩陣,可取轉置化成$v^{\mathrm{T}}(Z-EZ)$)

$= E((v^{\mathrm{T}}(Z-EZ))^2)$

≥ 0　　(定理A)

9. (20%)　【清大88統計】

令 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

5% (a) 求A之特徵多項式.

5% (b) 求A之特徵值和特徵向量.

5% (c) 證明A可對角化.

5% (d) 求A^n .

【分析】本題(a)(b)屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例11.

本題(c)屬於題型12B.

本題(d)屬於題型16B. 請參閱綜線CH16範例5.

【解】(細節略)

(a) $\det(A-xI)=-x^3+8x^2-20x+16$

(b) eigenvalue為 2, 2, 4

$A-2I$經列運算化為 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 2的eigenvector為 $[\,-s-t,\quad s,\quad t\,]^{\mathrm{T}}$, 其中$s,t$不全為0

$A-4I$經列運算化爲 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 4的eigenvector爲 $[-t, -2t, t]^T$, 其中t不爲0

(c) A的特徵多項式可分解爲一次式的乘積,

eigenvelue 2的algebraic multiplicity與geometric multiplicity都是2

eigenvelue 4的algebraic multiplicity與geometric multiplicity都是1

∴ 可對角化. (綜線CH12定理21)

(d) $A=PDP^{-1}$, 其中

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}=P\mathrm{diag}(2^n, 2^n, 4^n)P^{-1}$

$$=2^n \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} +4^n \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$