線性代數解析--中央89資工所

廖亦德 解

1. (15%) 【中央89資工】

A *Givens rotation* is a linear transformation from R^n to R^n used in computer programs to create zeros in a vector. The standard matrix of a *Givens rotation* in R^2 has the form:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},\ a^2+b^2=1$$

(a) Find a and b such that vector $[4, 3]^T$ is rotated into $[5, 0]^T$. (8%)

(b) Find a 3×3 matrix A such that $A[2, 3, 4]^T=[\sqrt{29}, 0, 0]^T$ (7%)

(Hint: Find a Givens rotation in R^3 s.t. $\begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Then apply another Givens rotation in R^3)

【分析】Givens-rotation利用旋轉將向量轉成等長而內含數值0的向量.

s.t.是such that的縮寫.

本題屬於題型01A. 但只須看懂題目，用解方程式的基本技巧即可作答.

【解】(a)

設 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$， 乘開得

$4a-3b=5$, $3a+4b=0$，可解得 $a=4/5$, $b=-3/5$.

(b) 依題目之提示，設

$$\begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{5} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

乘開得 $2a-4b=2\sqrt{5}$, $4a+2b=0.$

可解得 $a=1/\sqrt{5}$, $b=-2/\sqrt{5}$

再設 $\begin{bmatrix} c & -d & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{5} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{29} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

乘開得 $2\sqrt{5}\,c-3d=\sqrt{29}$, $3c+2\sqrt{5}\,d=0.$

可解得 $c=2\sqrt{5/29}$, $d=-3/\sqrt{29}$

所求為 $\begin{bmatrix} 2\sqrt{5/29} & 3/\sqrt{29} & 0 \\ -3/\sqrt{29} & 2\sqrt{5/29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

(請讀者自行乘開化簡)

【討論一】對任意不全為0的實數p, q, 方程式

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (p^2+q^2)^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

之解存在唯一, 其值為$x=p(p^2+q^2)^{-1/2}$, $y=-q(p^2+q^2)^{-1/2}$, 滿足$x^2+y^2=1$.

[證] 原矩陣乘開得

$px-qy=(p^2+q^2)^{1/2}$

$qx+py=0$

此聯立方程式之係數行列式 $p^2+q^2\neq0$, 依Cramer's rule,

$$x=(p^2+q^2)^{-1}\begin{vmatrix}(p^2+q^2)^{1/2} & -q\\ 0 & p\end{vmatrix}=p(p^2+q^2)^{-1/2},$$

$$y=(p^2+q^2)^{-1}\begin{vmatrix}p & (p^2+q^2)^{1/2}\\ q & 0\end{vmatrix}=-q(p^2+q^2)^{-1/2}. \qquad \text{(綜線CH4定理18)}$$

經驗算合於$x^2+y^2=1$.

【討論二】對任意不全爲0的實數p, q, r, 可取a,b,c,d, 使

$$\begin{bmatrix}a & 0 & -b\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(p^2+q^2)^{1/2}\\ q\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}c & -d & 0\\ d & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(p^2+q^2)^{1/2}\\ q\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(p^2+q^2+r^2)^{1/2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

其中 $a=p/(p^2+q^2)^{1/2}$, $b=-r/(p^2+q^2)^{1/2}$, 滿足$a^2+b^2=1$.

$c=(p^2+q^2)^{1/2}/(p^2+q^2+r^2)^{1/2}$, $d=-q/(p^2+q^2+r^2)^{1/2}$, 滿足$c^2+d^2=1$.

所得之複合矩陣爲

$$\begin{bmatrix}c & -d & 0\\ d & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 0 & -b\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca & -d & -cb\\ da & c & -db\\ b & 0 & a\end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix}p(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & q(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & r(p^2+q^2+r^2)^{-1/2}\\ -pq(p^2+q^2)^{-1/2}(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & (p^2+q^2)^{1/2}(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & -rq(p^2+q^2)^{-1/2}(p^2+q^2+r^2)^{-1/2}\\ -r(p^2+q^2)^{-1/2} & 0 & p(p^2+q^2)^{-1/2}\end{bmatrix},$$

【討論三】對任意不全爲0的實數p, q, r, 可取a,b,c,d, 使

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ (q^2+r^2)^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} c & -d & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ (q^2+r^2)^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p^2+q^2+r^2)^{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $a=q/(q^2+r^2)^{1/2}$, $b=-r/(q^2+r^2)^{1/2}$, 滿足$a^2+b^2=1$.

$c=p/(p^2+q^2+r^2)^{1/2}$, $d=-(q^2+r^2)^{1/2}/(p^2+q^2+r^2)^{1/2}$, 滿足$c^2+d^2=1$.

所得之複合矩陣爲

$$\begin{bmatrix} c & -d & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -da & db \\ d & ca & -cb \\ 0 & b & a \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} p(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & q(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & r(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} \\ -(q^2+r^2)^{1/2}(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & pq(q^2+r^2)^{-1/2}(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} & pr(q^2+r^2)^{-1/2}(p^2+q^2+r^2)^{-1/2} \\ 0 & -r(q^2+r^2)^{-1/2} & q(q^2+r^2)^{-1/2} \end{bmatrix}$$

2. (10%) 【中央89資工】

Let $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 8\\ 2 & 4 & 11\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 1 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. Compute $A^{-1}B$ without computing A^{-1}.

【分析】本題屬於題型03D. 請參閱綜線CH3定理12a.

【解】令$X=A^{-1}B$, 則應解 $AX=B$. 以分隔矩陣[A | B]進行列運算:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 3 & 8 & -3 & 5\\ 2 & 4 & 11 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4\end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 10 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 9 & 10\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3\end{array}\right]$$

$$\therefore\ A^{-1}B = X = \begin{bmatrix}10 & -1\\ 9 & 10\\ -5 & -3\end{bmatrix}$$

3. (15%) 【中央89資工】

A polynomial $p(t)$ of degree $n-1$ is defined as $p(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\dots+c_{n-1}t^{n-1}$, where $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ are n real numbers. Given n arbitrary real numbers $y_1, y_2, \dots, y_n$ and n distinct real numbers $x_1, x_2, \dots, x_n$, show that there exists one and only one polynomial $p(t)$ of degree $n-1$ such that $p(x_1)=y_1, p(x_2)=y_2, \dots, p(x_n)=y_n$.

【分析】本題屬於題型04D.

【解】請參閱綜線CH4範例18b. (另請參閱CH16定理25a:Lagrange內插法)

4. (10%)　　【中央89資工】

Compute the determinant $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & -1 \\ 0 & 8 & 8 & 3 & -8 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & -7 \end{vmatrix}$

【分析】本題屬於題型04B. 請參閱綜線CH4範例12.

【解】建議先以第二行加入第五行, 就可對第二列降階. 之後再對第一行進行處理.
本題答案爲76. 細節讀者自算.

5. (10%)　　【中央89資工】

True or false for determinants (每小題答對給2分, 答錯扣2分, 不答0分)

(a) $\det AB = \det A \det B$

(b) $\det(A+B) = \det A + \det B$

(c) $\det A^{T} = \det A$

(d) $\det(rA) = r \det A$

(e) $\det A = \det B$ if B is produced by interchanging two rows of A.

【分析】本題屬於題型04A.

【解】(a) true,　(b) false,　(c) true,　(d) false,　(e) false.

【說明】(a) 此爲定理.　　(綜線CH4定理6)

(b) 無此性質, 反例很容易湊. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A+B)=1,\ \det A+\det B=0.$$

(c) 此爲定理.　　(綜線CH4定理5)

(d) 應是 $\det(rA) = r^{n} \det A$.

(e) 應是 $\det(A) = -\det B$.

6. (10%) 【中央89資工】

True or false for eigenvalues (每小題答對給2分，答錯扣2分，不答0分)

(a) If λ is an eigenvalues of A, then λ^{-1} is an eigenvalue of A^{-1}.

(b) A and A^{T} have the same eigenvalues.

(c) If A^2 is a zero matrix, then 0 is the only eigenvalues of A.

(d) A is invertible if and only if 0 is not an eigenvalue of A.

(e) A is diagonalizable if and only if all eigenvalues of A are different(distinct).

【分析】本題屬於題型12A及16A.

【解】(a) true, (b) true, (c) true, (d) true, (e) false.

【說明】(a) 此爲定理. (綜線CH16定理12)

(b) 此爲定理. (綜線CH16定理1b)

(c) 此爲定理. (綜線CH14定理2a)

(d) 此爲定理. (綜線CH16定理12)

(e) 只有if-part成立. (綜線CH12定理23)

only-if-part的反例可取A=diag(2,2,3)

7. (10%) 【中央89資工】

Let W be a subspace of R^n and let $W^{\perp}$ be the orthogonal complement of W.
Show that $W^{\perp}$ is a subspace of R^n.

【分析】本題屬於題型11B. 本題W不必是subspace，只需是subset即可.

【解】請參閱綜線CH11定理17.

8. (10%) 【中央89資工】

(a) Find a spanning set for the null space of matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix}$$ (5%)

(b) Explain why the spanning set is automatically linearly independent. (5%)

【分析】本題屬於題型06C. 請參閱綜線CH定理.

【解】(a) 解方程式$Ax=o$, 原矩陣經列運算化爲列簡化梯形如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x = [-2s-4t, s, (7/5)t, t, 0\ ]^T$ (綜線CH3範例7)

$= s[-2, 1, 0, 0, 0\ ]^T + t[-4, 0, 7/5, 1, 0\ ]^T$

$\therefore$ { $[-2, 1, 0, 0, 0\ ]^T$, $[-4, 0, 7/5, 1, 0\ ]^T$ }爲一個生成集.

(b) 由(a)可知rank$A$=3, (綜線CH8範例14a)

$\therefore$ dim(null space)=5–rank$A$=2 (綜線CH8定理8)

此生成集含2向量, 且在2維空間內, 所以是基底. (綜線CH6定理22)

所以自動是獨立集.

(b) [另解] (此法只適用在2向量的場合)

此生成集內含2向量, 且係數不成比例, 所以是獨立集. (綜線CH6定理10要訣1)

9. (10%) 【中央89資工】

Find a singular value decomposition of matrix

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

【分析】本題屬於題型13F. 請參閱綜線CH13定理28.

【解】

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$，此式已正交對角化.

取$Q=I_2$, 則$Q^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(2, 3)$.

奇異値爲$2^{1/2}$, $3^{1/3}$, 奇異値矩陣爲 $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$AQ=A$, AQ的兩行已互相正交, 取外積可得第三個正交向量 $[1, -2, 1]^{\mathrm{T}}$

將這三個向量單位化並排成正交矩陣P.

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

則 $A=P\Sigma Q^{\mathrm{T}}$.