台大89資工所

1. (10%),　2.(a)(10%),　2.(b)(10%),　3.(20%)

【離散數學】

4. (5%)　【台大89資工】

[單選題] 若 V, W 爲 $\mathbb{R}^8$ 的向量子空間, 若$\dim V=4$, $\dim W=3$, $\dim(V\cap W)=2$,
則 $\dim(V+W)=$ (A) 1,　(B) 2,　(C) 3,　(D) 4,　(E) 5

【分析】本題屬於題型06B. 請參閱綜線CH6定理25.

【解】選E.

【說明】 $\dim(V+W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W)=4+3-2=5$.

5. (5%)　【台大89資工】

[單選題] 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩(rank) = (A)1,　(B)2,　(C)3,　(D)4

【分析】本題屬於題型08B. 請參閱綜線CH6定理23.

【解】選C.

【說明】經列運算化爲梯形後含有三個非零列.

6. (10%)　【台大89資工】

[多選題] 設α爲實數, S, T爲n階實數方陣, I表n階單位方陣, O表n階零方陣,

det(X)表示方陣X的行列式，試選出正確的敘述.

(A) 若$ST=O$則$TS=O$ (B) 若$ST=I$則$TS=I$ (C) det(ST)=det(S)det(T)

(D) det($S+T$)=det(S)+det(T) (E) det(αS)=αdet(S)

【分析】本題(A)(B)屬於題型02A. (C)(D)(E)屬於題型04A

【解】選B,C.

【說明】

(A) 反例之矩陣可取 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) S有右反且爲方陣，所以S^{-1}存在. (綜線CH3定理19)

對$ST=I$兩邊左乘S^{-1}，則得$T=S^{-1}$.

$\therefore$ $TS=S^{-1}S=I$.

(C) 此爲定理. (綜線CH4定理6)

(D) 參閱綜線CH4習題7.2.

(D) 應是 det(αS)=α^ndet(S) (綜線CH4定理7)

7. (10%) 【台大89資工】

[填充題] 已知T爲由$\mathbb{R}^3$到$\mathbb{R}^2$的線性變換，且$T(1, 1, 0)=(0 ,1)$, $T(0, 1, 1)=(-1 ,1)$,

$T(1, 0, 1)=(1 ,1)$；若$T(a, b, 1)=(1 ,0)$，求(a, b) = ____________

【分析】本題屬於題型08B. 請參閱綜線CH6定理23.

【解】 $(0, -1)$.

【說明】$\mathbb{R}^{1\times 3}$到$\mathbb{R}^{1\times 2}$的線性變換可表示爲$Tv=vA$, A爲3×2矩陣.

由已知條件得 $[\,1, 1, 0\,]\,A = [\,0, 1]$, $[\,0, 1, 1\,]\,A = [\,-1, 1]$, $[\,1, 0, 1\,]\,A = [\,1, 1]$.

此三條件可合併爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (綜線CH2定理7)

經列運算解此方程式: (綜線CH3範例12a)

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

解得 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

再解 $[\, a, b, 1\,]A = [\,1, 0\,]$ 即可得出a, b.

【註】 本題數據特殊，可拼湊如下:

$(1, 0)=(1, 1)-(0, 1)=T(1, 0, 1)-T(1, 1, 0)$

$=T((1, 0, 1)-(1, 1, 0))$ (線性條件，綜線CH7定理3)

$=T(0, -1, 1)$

由此得知$(0, -1)$爲一解，但至此尚不能判定是否有其它的解.

[計算題](每題各10%) 【台大89資工】

設$C=\{ f(x)$: 在$[0, 1]$上的連續函數$\}$，定義其上的內積爲

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)dx.$$

8. 試求$P_1=\{a+bx: a,b\in \mathbb{R}\}$上的一組orthonormal basis.
9. 設$y=ax+b$是與x^4的距離最近，試求a, b (註: 此題之距離是指由內積所定義出來的)

【分析】第8題屬於題型09C. 請參閱綜線CH9定理16, CH9範例18.

第9題屬於題型09B. 請參閱綜線CH9定理12, 13.

【解】8. 本題由1, x做Gram-Schmidt process 可求得(細節略)正交單位基底

$\{ 1, \sqrt{12}\,(x-1/2) \}$ (綜線CH9習題18.1)

9. 所求爲x^4對P_1的正投影. (綜線CH9定理13)

由上題所得之orthonormal basis，可知所求投影爲

$\langle x^4, 1\rangle 1+\langle x^4, \sqrt{12}(x-1/2)\rangle \sqrt{12}(x-1/2)$

$= (1/5)1+(2\sqrt{3}/15)\sqrt{12}(x-1/2) = (1/5)(4x-1)$ #