線性代數解析—中正90資工所

廖亦德 解

本檔案保留著作權, 禁止任何未授權之散佈.

[1]. (10%) 【中正90資工】

Let $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ be n real data pairs and assume that $x_1, x_2, ..., x_n$ are distinct. Show that there exists a unique polynomial

$$p(x)=r_0+r_1x+r_2x^2+...+r_{n-1}x^{n-1}$$

such that $p(x_i)=y_i$, for each i=1,2,..., n.

【分析】本題屬於題型04D.

【提示】本題根據所給條件利用Cramer's rule(綜線CH4定理18) 求解$p(x)$的係數.
細節請參閱綜線CH4範例18b, 此處不再重複.

[2]. (10%) 【中正90資工】

Let V be an inner product space on P_3 with the inner product

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx .$$

Determine the orthogonal basis by applying the Gram-Schmidt orthogonalization algorithm to the basis $\{ 1, x, x^2, x^3\}$.

【分析】本題屬於題型09C. 請參閱綜線CH9範例18.

【提示】本題要注意積分範圍爲[−1, 1]. 另外, 本題只要求正交化, 不必做單位化.
所求答案爲 $\{ 1, x, x^2-1/3, x^3-(3/5)x\}$ (過程略) #

[3]. (10%) 【中正90資工】

Suppose $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ are eigenvalues of an $n\times n$ matrix A. Show tht $\det A=\lambda_1\lambda_2....\lambda_n$

【分析】本題屬於題型12A. 請參閱綜線CH13定理8.

【解】A的特徵多項式在適當的擴張數系可完全分解:

$\det(A-xI)=(-1)^n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)$ (綜線CH12定理9a)

以$x=0$代入則得 $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$

[4]. (10%) 【中正90資工】

Show that $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ is a basis of R^3.

【分析】本題屬於題型06B.

【提示】本題需證明生成及獨立. (綜線CH6定義16)

生成需證

$\forall\ v=[x,\ y, z]^T\in R^3$, 將$v$表成所給之三向量的線性組合. (綜線CH6定義1②)

獨立之定義參考綜線CH6範例11. (綜線CH6定義9)

[5]. (10%) 【中正90資工】

Let A be an $m\times n$ matrix.

(a) If rank of A is r, what is the dimension of the null space (kernel) of A ?

(b) Show that tha rank of A is equal to the rank of A^TA.

【分析】本題(a)屬於題型08E. 請參閱綜線CH8定理8.

本題(b)屬於題型09B. 請參閱綜線CH9定理20. 此小題命題有瑕疵, 需補"A爲實數矩陣"的條件才能成立.

【提示】(a) rank$A=n-r$. (綜線CH8定理8)

(b) 請參閱綜線CH9定理20之證明, 此處不再重複.