台大90資工所

以下是2題證明題, 每題25分. 證明必須精簡, 清楚, 完整.

[1]. (25%) 【離散】

[2]. (25%) 【離散】

以下是25題單選題, 答對每題2分, 答錯不倒扣.

[3]. (2%) 【台大90資工】

以下有幾個是三度空間的子空間(subspace)? (a)原點, (b)x軸, (c)由(1,1,1)到(–1,–1,–1)的線段, (d) y=3, z=3的直線, (e) yz平面, (f) z=3的平面, (g)半徑等於1的球面, (h)半徑等於1的球體, (i) 整個三度空間

①3個, ②4個, ③5個, ④6個, ⑤以上皆非

【分析】本題屬於題型05B. 請參閱綜線CH5範例12, CH5範例12a.

【解】選②

【討論】(a)是, (b)是, (c)不是, (d)不是, (e)是, (f)不是, (g)不是, (h)不是, (i)是.

[4--5] (4%) 【台大90資工】

[4].矩陣 $\begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$ 的幾何意義爲何? (2%)

①行移, ②旋轉, ③縮放, ④鏡射, ⑤以上皆非

[5].矩陣 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$ 的幾何意義爲何? (2%)

①行移, ②旋轉, ③縮放, ④鏡射, ⑤以上皆非

【分析】這兩題的"行移"應是"平移"的筆誤
這兩題都屬於題型01A. 請參閱綜線附錄D範例22.

【解】[4]選②. [5]選④.

【討論】[4]. ∵ $(0.6)^2+(0.8)^2=1$. ∴可令$0.6=\cos\theta$, $0.8=\sin\theta$, (高中數學)
此時矩陣爲旋轉的標準型. (綜線附錄D範例22)
[5]. 同上, 此時矩陣爲鏡射的標準型. (綜線附錄D範例22)

[6--13] (16%) 請根據下面敘述回答題目6至13.
有一個由三度空間到四度空間的線性變換(linear transformation),

分別把 $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 映射到 $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}$

[6].下列何者是矩陣A? (2%)

① $\begin{bmatrix}0&1&1&2\\1&2&3&4\\1&1&2&2\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}1&1&2&2\\1&2&3&4\\0&1&1&2\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&3&2\\2&4&2\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\2&3&1\\2&4&2\end{bmatrix}$

⑤ 以上皆非

[7].矩陣A是不是線性相依(linear dependent)?
①是, ②不是, ③再加條件就會'是', ④再加條件就會'不是', ⑤以上皆非

[8]. $[1\quad 1\quad 1]^T$會被映射到哪裡?

① $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, ② $\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$, ③ $\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$, ④ $\begin{bmatrix}4\\5\\6\\7\end{bmatrix}$, ⑤ 以上皆非

[9].矩陣A的秩(rank)是多少? (2%)

①1, ②2, ③3, ④4, ⑤以上皆非

[10]至少被某三度空間的點映射到的所有四度空間的點, 組成的圖形是什麼? (2%)

①點, ②線, ③面, ④三維的超平面(hyper plane), ⑤以上皆非

[11]會映到四度空間原點的所有三度空間的點, 組成的圖形是什麼? (2%)

①點, ②線, ③面, ④三維的超平面(hyper plane), ⑤以上皆非

[12]線性系統 $Ax = \begin{bmatrix}2\\4\\6\\8\end{bmatrix}$ 的解是 (2%)

①無解, ②有唯一解, ③有無限多組解, ④條件不足無法判斷, ⑤以上皆非

[13]線性系統 $Ax = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$ 的解是 (2%)

①無解, ②有唯一解, ③有無限多組解, ④條件不足無法判斷, ⑤以上皆非

【分析】[6]屬於題型07A. 本題有許多種解法, 請參考綜線CH7範例4.

[7]屬於題型06A. [8]只是基本觀念題

[9]屬於題型08B. [10][11]屬於題型05C. [12][13]屬於題型03A

【解】 [6]選④. [7]選②??. [8]選⑤. [9]選②.[10]選③.[11]選②.[12]選③. [13]選①.

(第[7]題有疑問, 命題原意極可能是要選①)

【討論】[6]. A所代表的線性變換將v映射到w的意思就是$Av=w$. (綜線CH7定理9a)

在選擇題由選項依矩陣乘法即可判定答案. (利用左直切較快)

(綜線CH2定理6②)

[6]另解: 若本題爲計算題, 解法如下:

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix},$$

合併爲 $A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\2&3&1\\2&4&2\end{bmatrix}$, (綜線CH2定理6①)

等號左邊剛好就是A. (綜線CH2定義10要訣3)

[6]另解: (此法請參閱CH7範例4)

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A\left(x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=x\,A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\,A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\,A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$= x\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\x+2y+z\\2x+3y+z\\2x+4y+2z\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\2&3&1\\2&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$ (綜線CH2定理6②)

末式之左因子即爲A.

[7]. A是矩陣空間中的一個向量. 因$A\neq O$, 所以線性獨立. (綜線CH6定義9要訣2)

但依常理判斷, 此題極可能含有筆誤, 命題原意可能是:

“ [7].矩陣A的三個行是不是線性相依(linear dependent)? ”

依標準解法可發現這三行是linear dependent.　　(參閱綜線CH6範例11)

這時答案就變成①

[8]. 由矩陣乘法算出$A[1\ 1\ 1]^T=[2\ 4\ 6\ 8]^T$. 所以是以上皆非.

[9]. 經列運算將A化為梯形時, 含有兩個非零列　　(綜線CH3演算法4a)

∴ rank$A$=2..　　(綜線CH8範例14a)

[10].所求爲 $\{w\in\mathbb{R}^{4\times1} \mid \exists v\in\mathbb{R}^{3\times1}, 使 w=Av\}$

$= \{Av \mid v\in\mathbb{R}^{3\times1}\} = \mathrm{CSP}(A)$　　(綜線CH5定理17)

dim(CSP(A))=rank$A$=2,　　(第[9]題)

∴ CSP(A)是$\mathbb{R}^{4\mathrm{x}1}$中的二維子空間(通過原點的平面).

[11].所求爲 $\{v\in\mathbb{R}^{3\times1} \mid Av=o\}=\ker(A)$　　(綜線CH5定義19)

dim ker(A) = 3 – rank$A$ = 1　　(綜線CH8定理8②)

∴ ler(A)是$\mathbb{R}^{3\mathrm{x}1}$中的一維子空間(通過原點的直線).

[12].依方程式之標準解法, 即可算出本題有無限多組解.　(參閱綜線CH3範例7)

[13].依方程式之標準解法, 即可算出本題無解.　　(參閱綜線CH3範例8)

[14--15] (4%) 【台大90資工】

令$B=A^{T}A$, 其中A是上一題組的矩陣. 請回答題目14至15.

[14]請問矩陣B是不是對稱矩陣? (2%)

①是, ②不是, ③再加條件就會‘是’, ④再加條件就會‘不是’, ⑤以上皆非

[15]下列敘述何者正確? (2%)

①不存在x,使得$x^{T}Bx\le 0$, ②不存在x,使得$x^{T}Bx\ge 0$, ③存在x,使得$x^{T}Bx<0$,
④存在x,使得$x^{T}Bx>0$, ⑤以上皆非

【分析】本題屬於題型10C. 本題之基礎知識請參閱綜線CH10定義19, CH13定理18a.

【解】[14]選①. [15]選④.

【討論】[14] $B^{T}=(A^{T}A)^{T}=A^{T}(A^{T})^{T}=A^{T}A=B$. (綜線CH2定理23)

[15] $x^{T}Bx=x^{T}A^{T}Ax=(Ax)^{T}(Ax)\ge 0$, 所以③不能成立.

對$x=o$, 必定$x^{T}Bx=0$, 所以①②都不能成立.

只須取一個使$Ax\ne o$的x就可使$(Ax)^{T}(Ax)>0$, 所以④成立.

[16--18] (6%) 【台大90資工】

請先求出 $C=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&3&0&1\\3&0&4&0\\0&2&0&4\end{bmatrix}$ 的特徵值(eigen value)以及特徵向量(eigen vector),

再回答題目16至18.

[16]矩陣C共有幾個數值相異的特徵值? (2%)

①1個, ②2個, ③3個, ④4個, ⑤以上皆非

[17]矩陣C絕對值最小的特徵值是多少? (2%)

①1, ②2, ③3, ④4, ⑤以上皆非

[18]矩陣C相對於絕對值最大的特徵值之特徵向量在四度空間中形成的圖形是什麼?(2%)
①點, ②線, ③面, ④三維的超平面(hyper plane), ⑤以上皆非

【分析】本題屬於題型12C. 請參閱綜線CH12範例11.

【解】[16]選③. [17]選①. [18]選⑤??. ([18]題有疑問, 命題原意應該是選③)

【討論】 $\det(C-xI)$

$$=\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4-x & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 & 1 \\ 5-x & 0 & 5-x & 0 \\ 0 & 5-x & 0 & 5-x \end{vmatrix} =$$

$$=(5-x)^2\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =(5-x)^2\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(5-x)^2\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (5-x)^2\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (5-x)^2(1-x)(2-x)$$

∴ C的特徵值爲5,5,2,1

[16] 數值相異的特徵值有3個,

[17] 絕對值最小的特徵值是1.

[18] 依大多教科書的定義, 不承認零向量是特徵向量, 這就使本題答案爲以上皆非. 但此種考法不合常理.

也有的教科書承認零向量是特徵向量. 依此, 繼續求解如下:

$\ker(C-5I)$

$$= \ker\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{\text{列運算}}{=} \ldots.. . = \ker\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由Sylverter's law可判知 $\dim\ker(C-5I) = 4-2 = 2$,

所以eigenspace是2維空間, 答案選③.

[19--22] (8%)　【台大90資工】

$$請先求出\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times C \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\ 的特徵值,$$

其中C是上一題組的矩陣, 再回答題目19至22.

[19]矩陣D共有幾個數值相異的特徵值? (2%)

①1個,　②2個,　③3個,　④4個,　⑤以上皆非

[20]矩陣D絕對值第二小的特徵值是多少? (2%)

①1,　②2,　③3,　④4,　⑤以上皆非

[21]矩陣D是不是可對角化(diagonalizable)? (2%)

①是,　②不是,　③再加條件就會'是',　④再加條件就會'不是',　⑤以上皆非

[22]矩陣D^{-1}是不是可對角化(diagonalizable)? (2%)

①是,　②不是,　③再加條件就會'是',　④再加條件就會'不是',　⑤以上皆非

【分析】本題屬於題型12B.

【解】[19]選③.[20]選②.[21]選①.[22]選①.

【討論】D的特徵值與C相同, (綜線CH16定理1a)

依上一題組之計算, D的特徵值是5,5,2,1.

[19] 數值相異的特徵值有3個

[20] 矩陣D絕對值第二小的特徵值是2

[21] 由[18]得知C可對角化. (綜線CH12定理21)

所以D也可對角化 (綜線CH15定理14)

[22] 由[21]得知D^{-1}也可對角化. (綜線CH16定理1c)

[23--27] (10%) 【台大90資工】

請先把 $E=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&3&2&0\\0&1&3&2\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ 分解成L乘以U, 其中L是下三角形(lower triangular)矩陣,

而U是單位上三角形(unit upper triangular)矩陣, 再回答題目23至27.

[23]下列何者是矩陣L? (2%)

① $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}3&0&0&0\\1&3&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&3\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}4&0&0&0\\1&4&0&0\\0&1&4&0\\0&0&1&4\end{bmatrix}$

⑤ 以上皆非

[24]下列何者是矩陣U? (2%)

① $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⑤ 以上皆非

[25]矩陣L的行列式(determinant)是多少?

①1, ②2, ③3, ④4, ⑤以上皆非

[26]矩陣U的行列式(determinant)是多少?

①1, ②2, ③3, ④4, ⑤以上皆非

[27]矩陣E的行列式(determinant)是多少?

①1, ②2, ③3, ④4, ⑤以上皆非

【分析】[23][24]屬於題型03E. 請參閱綜線CH3範例28.

[25][26][27]屬於題型04B.

【解】[23]選⑤.[24]選①.[25]選④.[26]選①. [27]選④.

【討論】[23][24] 由題目之要求，可用先除法求算 (參閱綜線CH3範例28)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} (1/2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} (1/2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[25][26] 三角矩陣主對角線乘積即為行列式.　　(綜線CH4定理4a)

[27] $\det E = \det(LU) = \det L \det U = 4 \cdot 1 = 4$　　(綜線CH4定理6)