線性代數解析—中正91資工所

廖亦德 解

[1]. (10%) 【中正91資工】

Let $x=(1, 1, ..., 1)\in R^n$, $y=(1, 2, ..., n)\in R^n$, and θ_n be the angle between x and y in R^n.

Find $\lim_{n\to\infty} \theta_n$

【分析】本題屬於題型01B.

【解】由內積公式 $x\cdot y=\|x\|\ \|y\|\cos\theta_n$, (綜線CH1定義3)

$1+2+...n=(1^2+1^2+...+1^2)^{1/2}(1^2+2^2+...+n^2)^{1/2}\cos\theta_n$

$n(n+1)/2=(n)^{1/2}(n(n+1)(2n+1)/6)^{1/2}\cos\theta_n$

$\cos\theta_n=(6^{1/2}/2)((n+1)/(2n+1))^{1/2}$

$\lim\cos\theta_n=(6^{1/2}/2)(1/2)^{1/2}=3^{1/2}/2$

$\lim\theta_n=\pi/6$

[2]. (10%) 【中正91資工】

Let A be an $n\times n$ real matrix.

(a) Show that $\det(A)$ is equal to the product of the eigenvalues of A.

(b) Show that A is singular if and only if 0 is an eigenvalue of A.

【分析】本題屬於題型12A. 請參閱綜線CH13定理8及CH14定理2b.

【解】(a) A的特徵多項式在複數系理論上必可完全分解:

$\det(A-xI)=(-1)^n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)...(x-\lambda_n)$

以$x=0$代入則得 $\det(A)=\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$

(b) A singular $\Longleftrightarrow$ $\det(A)=0$ $\Longleftrightarrow$ $\det(A-0I)=0$

0是A的eigenvalue

[3]. (10%)　【中正91資工】

Let A be an $n\times n$ real matrix. Show that if A is invertible, then A is row equivalent to I_n (the identity matrix).

【分析】本題屬於題型03B. 請參閱綜線CH3定理16.

【解】將A經列運算化成$n\times n$的列簡化梯形矩陣U.　(綜線CH4定義4,演算法4a)

則 U的非零列數=rank(U)　(綜線CH6定理23)

=rank(A)　(綜線CH8定理14)

$=n$.　(綜線CH8定理17)

∴ 由列簡化梯形矩陣的定義可推知 $U=I_n$.　(綜線CH4定義4)

[4]. (10%)　【中正91資工】

(a) Let A be an $n\times n$ real matrix and $c\in R$, $c\neq 0$. If $I-cA$ is a nilpotent matrix, show that A is invertible.

(b) Let A be $n\times n$ real matrix and $A^2=A$. Show that $(A+I)^k=I+(2^k-1)A$, $\forall k\in N$.

【分析】本題(a)屬於題型02B. 相關類題請參閱綜線CH2範例21.

本題(b)屬於題型02A. 相關類題請參閱綜線CH2範例17.

【解】(a) 令$B=I-cA$, 由已知, 可設 $B^k=O$.　(綜線CH14定義1)

則 $A=(1/c)(I-B)$

令 $A_1=c(I+B+B^2+...+B^{k-1})$, 則

$AA_1=(1/c)(I-B)c(I+B+B^2+...+B^{k-1})$

$=(I+B+B^2+...+B^{k-1})-(B+B^2+...+B^{k-1}+O)=I$.

同理, $A_1A=I$.

∴ A可逆.　(綜線CH2定義10)

(b) 請參閱綜線CH2範例17, 此處不再重覆.

[5]. (10%)　【中正91資工】

(a) Let $T:R^2\to R^2$ be $T(x_1, x_2)=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta, x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)$.

Show that T is a linear transformation.

(b) Find the inverse function of T.

【分析】本題(a)屬於題型07A. 相關類題請參閱綜線CH7範例7, CH7範例8.

本題(a)屬於高中數學. 相關類題請參閱綜線CH8範例30.

【解】(a) $\forall a, b\in \mathrm{R}$, $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2)\in \mathrm{R}^2$, 欲證線性條件: (綜線CH7定義1)

$T(a(x_1, x_2)+b(y_1, y_2))$

$=T(ax_1+by_1, ax_2+by_2)$

$=((ax_1+by_1)\cos\theta-(ax_2+by_2)\sin\theta, (ax_1+by_1)\sin\theta+(ax_2+by_2)\cos\theta)$

$=(ax_1\cos\theta-ax_2\sin\theta, ax_1\sin\theta+ax_2\cos\theta)+(by_1\cos\theta-by_2\sin\theta, by_1\sin\theta+by_2\cos\theta)$

$=a(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta, x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)+b(y_1\cos\theta-y_2\sin\theta, y_1\sin\theta+y_2\cos\theta)$

$=aT(x_1, x_2)+bT(y_1, y_2)$

(b) 令 $(y_1, y_2)=T(x_1, x_2)=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta, x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)$

則 $y_1=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta$

$y_2=x_1\sin\theta+x_2\cos\theta$

可解得 $x_1=y_1\cos\theta+y_2\sin\theta$, $x_2=-y_1\sin\theta+y_2\cos\theta$ (可用綜線CH4定理18)

$\therefore\ T^{-1}(y_1, y_2)=(y_1\cos\theta+y_2\sin\theta, -y_1\sin\theta+y_2\cos\theta)$