線性代數解析--台大91資工所

廖亦德 解

[1]. (10%) 【台大91資工】

Let S be the subspace of R^4 containing all vectors with

$X_1+X_2+X_3+X_4=0$ and $X_1+X_2-X_3-X_4=0$,

find a basis for the space $S^{\perp}$. ($S^{\perp}$=containing all vectors orthogonal to S)

【分析】本題屬於題型11C. 相關類題請參閱綜線CH11範例24.

【解法一】由列運算求S:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore S=\{ [-s, s, -t, t]^T \mid s, t\in R \}$ (參綜線CH3範例7)

$=\{ s[-1, 1, 0, 0]^T+t[0, 0, -1, 1]^T \mid s, t\in R \}$

$=\text{span}\{ [-1, 1, 0, 0]^T, [0, 0, -1, 1]^T \}$

$S^{\perp}=\{ [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \mid [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \cdot [-1, 1, 0, 0]^T=0,$
$[x_1, x_2, x_3, x_4]^T \cdot [0, 0, -1, 1]^T=0 \}$

$=\{ [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \mid -x_1+x_2=0,\ -x_3+x_4=0 \}$

$=\{ [s, s, t, t]^T \mid s, t\in R \}$

$\therefore$ 可取$\{ [1\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 1\ 1]^T\}$爲$S^{\perp}$之基底.

【解法二】

令$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 則 $S=\ker(A)$. (綜線CH5定義19)

$S^{\perp}=CSP(A^T)$ (綜線CH11定理23)

$= \text{span}\{ [1\ 1\ 1\ 1]^T, [1\ 1\ -1\ -1]^T\}$

$\therefore$ 可取$\{[1\quad 1\quad 1\quad 1]^{\mathrm{T}}, [1\quad 1\quad -1\quad -1]^{\mathrm{T}}\}$爲$S^{\perp}$之基底.

A^{T}可經行運算化爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (如解法一)

$\therefore$ 也可取$\{[1\quad 1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}, [0\quad 0\quad 1\quad 1]^{\mathrm{T}}\}$爲$S^{\perp}$之基底. (綜線CH5定理17)

[2]. (10%) 【台大91資工】

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, find two invertible matrices B, C such that $A=B+C$.

【分析】本題屬於題型02A. 請參閱綜線CH4定理17.

【解】令$M=\max\{|a|, |d|\}+1$, 則 $a-M<0$, $d-M<0$ 且 $M>0$.

令$B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ c & M \end{bmatrix}$, $C= \begin{bmatrix} a-M & b \\ 0 & d-M \end{bmatrix}$, 則 $A=B+C$.

$\det B=M^2 \neq 0$, $\det C=(a-M)(d-M)\neq 0$ (綜線CH4定理4a)

$\therefore$ B, C 皆可逆. (綜線CH4定理17)

[3]. (15%) 【台大91資工】

Suppose the matrix A has eigenvalues 0,1,2 with eigenvectors V_0, V_1, V_2.

Solve the following equation for X.

(a) $AX=V_0$.

(b) $AX=V_1+V_2$.

【分析】本題爲題型12B及題型03B之綜合應用題. .

【勘誤】本題題意模糊, 應補條件: “A爲3×3矩陣” 才能求解. 題目中equation應改爲 equations.

【解】當A爲3×3矩陣時, 由題目條件得知A可對角化 (綜線CH12定理23)

此時V_0, V_1, V_2形成一組基底 (綜線CH12定理16)

且 $K^{3\times 1}=\mathrm{Ker}(A)\oplus\mathrm{Ker}(A-I)\oplus\mathrm{Ker}(A-2I)$ (綜線CH12定理21)

(a) 若 $X=k_0V_0+k_1V_1+k_2V_2$ 滿足 $AX=V_0$

則 $o+k_1V_1+2k_2V_2=V_0$.

於是V_0, V_1, V_2線性相關 (綜線CH6定理10)

此為矛盾. (綜線CH12定理20①)

∴ 原方程式無解.

(b) 觀察得知 $A(V_1+(1/2)V_2)=V_1+V_2$. (綜線CH12定義1)

而 $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Ker}(A-0I)=\mathrm{span}\{V_0\}$ (綜線CH12定理7的證明)

∴ 通解為 $V=V_1+(1/2)V_2+tV_0$. (綜線CH3定理11a②)

[4]. (15%) 【台大91資工】

Suppose we have a matrix A with eigenvalues 0, 1, 2, 3, 4, and the corresponding eigenvectors V_0, V_1, V_2, V_3, V_4. Prove or disprove that $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ is linearly independent.

【分析】本題屬於題型12B. 請參閱綜線CH12定理20①.

【解法一】Prove: 相異特徵值的特徵向量必線性獨立. (綜線CH12定理20①)

(Note: 證明題非不得已不要這樣套定理作答)

【解法二】Prove:

設純量 k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 滿足 $k_0V_0+k_1V_1+k_2V_2+k_3V_3+k_4V_4=o$, (A0)

欲證k_0, k_1, k_2, k_3, k_4全為0:

以T作用於(A0)式, 得 $k_1V_1+2k_2V_2+3k_3V_3+4k_4V_4=o$, (A1)

以$T-I$作用於(A1)式, 得 $2k_2V_2+6k_3V_3+12k_4V_4=o$, (A2)

以$T-2I$作用於(A2)式, 得 $6k_3V_3+24k_4V_4=o$, (A3)

以$T-3I$作用於(A3)式, 得 $24k_4V_4=o$, (A4)

∵ eigenvector不為o, ∴ $k_4=0$,

代回(A3)式得 $6k_3V_3=o$, ∴ $k_3=0$

代回(A2)式得 $2k_2V_2=o$, ∴ $k_2=0$

代回(A1)式得 $k_1V_1=o$, ∴ $k_1=0$

代回(A0)式得 $k_0V_0=o$, ∴ $k_0=0$

【討論】綜線CH12定理20①是一般的情形, 要用數學歸納法證. 本題是給出特徵值與項數的特例, 應直接證明.

[5]. (5%) 【離散】

[6]. (5%) 【離散】

[7]. (10%)【離散】

[8]. (5%) 【離散】

[9]. (10%) 【離散】

[10]. (5%) 【離散】

[11]. (10%) 【離散】