線性代數解析—政大91資料所

廖亦德 解

[III]. (24%) 【政大91資料】

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) 將A化為簡約列梯形(reduced row-echelon form). (必須列出過程) (8%)

(b) 求齊次系統(homogeneous system) $Ax=o$的解空間(solution space)之基底(basis),
其中$x=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$, o是零向量. (8%)

(c) A的秩rank是多少? (必須列出過程) (8%)

【分析】本題(a)(b)屬於題型03A. 相關類題請參閱綜線CH3範例7.
本題(c)屬於題型08B. 相關類題請參閱綜線CH8範例14a.

【解】(a) 由列運算, A可化為(過程略)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) 解空間

$=\{ [-t-u , t , -u , 0, u]^T \mid t, u\text{為純量} \}$

$=\{ t[-1 , 1 , 0 , 0, 0]^T+u[-1 , 0 , -1 , 0, 1]^T \mid t, u\text{為純量} \}$

基底可取為 $\{ [-1 , 1 , 0 , 0, 0]^T, [-1 , 0 , -1 , 0, 1] \}$

(c) A的列空間以{[1, 1, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0]}爲基底. (綜線CH5定理23)

∴ rank$A$=dim RSP(A) = 3 (綜線CH8定義13)

[IV(a)]. (8%) 【政大91資料】

R^3中的三個向量v_1=(3, 0, –4), v_2=(5, –1, 2), v_3=(1, 1, 3)是否線性獨立(linearly independent)? 並將v=(16, 1, 9)表示成v_1, v_2, v_3的線性組合.

【分析】本題屬於題型06A及06D. 相關類題請參閱綜線CH6範例11.

【解】1° 令 $x(3, 0, -4) + y(5, -1, 2) + z(1, 1, 3) = (0, 0, 0)$.

即 $3x+5y+z=0$,

$-y+z=0$

$-4x+2y+3z=0$

解得(過程略) $x=0$, $y=0$, $z=0$.

∴ v_1, v_2, v_3線性獨立. (綜線CH6定義9)

2° 令 $(16, 1, 9) = x(3, 0, -4) + y(5, -1, 2) + z(1, 1, 3)$.

即 $3x+5y+z=16$,

$-y+z=1$

$-4x+2y+3z=9$

解得(過程略) $x=1$, $y=2$, $z=3$.

∴ $v=v_1+2v_2+3v_3$.

[IV(b)]. (8%) 【政大91資料】

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c\text{是實數} \right\} \text{是不是} V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d\text{是實數} \right\}$$

的子空間? (必須說明理由).

如果是, 也求出W的基底與維度

【分析】本題前半屬於題型05B, 後半屬於題型06C. .

【解】1° 是. 因爲W包含於V且滿足封閉性:　(綜線CH5定理11)

$\forall x, y,$

$$x\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_1+ya_2 & xc_1+yc_2 \\ xc_1+yc_2 & xb_1+yb_2 \end{bmatrix}$$ 仍屬於W.

2° $$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c\text{是實數} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c\text{是實數} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$ 生成W. 又顯然線性獨立.

所以是W的一個基底.

$\dim W=3$.