# 線性代數解析--清大92資應所

廖亦德 解



參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章.

題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

[I]. (25%) 【清大92資應】

Fill in the blanks.

1.

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

【分析】本題屬於題型04B. 相關資料請參閱綜線CH4範例12.

【解】 8

【討論】

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{(第二列降階)}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

[I]. (25%) 【清大92資應】

Fill in the blanks.

2. Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad A^{-1} = \underline{\hspace{4cm}}$$

【分析】本題屬於題型03D. 相關資料請參閱綜線CH3範例12b.

【解】

$$\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

【討論】

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{可經列運算化爲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \end{array}\right]$$

[I]. (25%)　　【清大92資應】

Fill in the blanks.

3. The angle between $x$=[1, 1, 1, 1]$^T$ and $y$=[8, 2, 2, 0]$^T$ is ________________

【分析】本題屬於題型01A. 相關資料請參閱綜線CH1定義3.

【解】$\pi/4$

【討論】$x \cdot y = 12$,　$\|x\|^2 = 4$,　$\|y\|^2 = 72$.

$x \cdot y / (\|x\| \ \|y\|) = 1/2^{1/2}$

夾角爲 $\cos^{-1}(1/2^{1/2}) = \pi/4$

[I]. (25%)　【清大92資應】

Fill in the blanks.

4. If $A$ is an $m\times n$ matrix of rank $r$, then $\dim(N(A^T))=$ ________________

【分析】本題屬於題型08E. 相關資料請參閱綜線CH8定義5, CH8定理8.

【解】$m-r$

【討論】$A^T$爲$n\times m$矩陣, 其nullity爲$m-r$.

[I]. (25%)　【清大92資應】

Fill in the blanks.

5. Let $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

The dimension of the eigenspace corresponding to the eigenvalue $\lambda=1$ is ____________ .

【分析】本題屬於題型12A. 相關資料請參閱綜線CH12定義8.

【解】2

【討論】

$$A-I=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{經列運算化爲} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\text{rank}(A-I)=1$,

$\therefore$ $\dim \text{Ker}(A-I)=3-1=2$

[II]. (25%)　【清大92資應】

Fill in the blanks.

1. Let $V$ = span($[1,0,1]^T$) $\subseteq$ $R^3$, then $V^{\perp}$ = ___________

【分析】本題屬於題型11C. 相關資料請參閱綜線CH11範例24.

【解】 span( { $[-1, 0, 1]^T$, $[0, 1, 0]^T$ } )

【討論】所求為

$$\{ [x, y, z]^T \mid \forall t \in R,\quad [x, y, z]^T \cdot ( t\,[1, 0, 1]^T)=0 \} \qquad \text{(綜線CH8定義4)}$$
$$= \{ [x, y, z]^T \mid [x, y, z] \cdot [1, 0, 1]=0 \}$$
$$= \{ [x, y, z]^T \mid \quad x + z =0 \}$$
$$= \{ [-t, s, t]^T \mid s, t \in R \} \qquad \text{(綜線CH3範例7)}$$
$$= \text{span}( \{ [-1, 0, 1]^T, [0, 1, 0]^T \} )$$

[II]. (25%) 【清大92資應】

Fill in the blanks.

2. Let $x=[2, 4, ..., 2n]^T$, then $\| x \|_1=$ ____________

【分析】本題屬於題型17A. 相關資料請參閱綜線附錄B範例2.

【解】 $n(n+1)$

【討論】$2+4+...+2n=n(n+1)$

[II]. (25%) 【清大92資應】

Fill in the blanks.

3. Let $v=[1, 1, 1]^T$ and $b=[2, 4, 6]^T$, then the projection of $b$ onto the line $v$ is __________ .

【分析】本題屬於題型01A. 相關資料請參閱綜線CH1定義8.

【解】 $[4, 4, 4]^T$

【討論】$v \cdot b = 12,\quad v \cdot v = 3,$

$$((v \cdot b) / (v \cdot v))v = 4[1, 1, 1]^T=[4, 4, 4]^T \qquad \text{(綜線CH1定義8)}$$

[II]. (25%)　【清大92資應】

Fill in the blanks.

4. Let $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

The eigenvlaues of $B^{-1}$ is ________ .

【分析】本題屬於題型16A. 相關資料請參閱綜線CH16定理1a.

本題計算$B$的特徵值可使用快速解法(綜線CH12定理8a⑧及CH12定理13).

【解】 $-1/5, -1, 1/2$

【討論】先求出$B$的eignevalue爲$-5, -1, 2$.

[II]. (25%)　【清大92資應】

Fill in the blanks.

5. Let $L : \mathrm{R}^3 \longrightarrow \mathrm{R}^3$ be a linear transform defined as $L([a, b, c]^T)=[0, 0, b+c]^T$, then $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ = ________ .

【分析】本題屬於題型08A. 相關資料請參閱綜線CH8定義5.

【解】 2

【討論】$\mathrm{Ker}(L)=\{[a, b, c]^T \mid L([a, b, c]^T)=[0,0,0]^T\}$

$= \{[a, b, c]^T \mid [0, 0, b+c]^T=[0,0,0]^T\}$

$= \{[a, b, c]^T \mid b+c=0\}$

$= \{[a, -c, c]^T \mid b+c=0\}$

[III]. (20%)　【清大92資應】

Mark ◯ if the statements is true, and mark × otherwise.

1. If $S$ and $T$ are subspaces of a vector space $V$, then $S\cup T$ is a subspace of $V$.

【分析】本題屬於題型05B. 相關資料請參閱綜線CH5範例22a.

【解】 ×

[III]. (20%) 【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

2. If $x$ is a nonzero vector in $R^n$ and $Ax=o$, then det($A$)=0.

【分析】本題屬於題型08E. 相關資料請參閱綜線CH8定理17.

【解】 ○

【討論】由已知條件推知 Ker$A\neq\{o\}$ (綜線CH8定義5)

∴ $A$不可逆 (綜線CH8定理17)

∴ det$A$=0 (綜線CH4定理17)

[III]. (20%) 【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

3. Let $E=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ be an ordered basis for $R^n$. If $L_1 : R^n\to R^n$ and $L_2 : R^n\to R^n$ have the same matrix representation with respect to $E$, then $L_1=L_2$.

【分析】本題屬於題型08E. 相關資料請參閱綜線CH8定理25.

【解】○

[III]. (20%) 【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

4. If $U$, $V$, $W$ are subspaces of $R^3$, then $U\perp V$ and $V\perp W$ imply $U\perp W$.

【分析】本題屬於題型11B. 相關資料請參閱綜線CH11定義15.

【解】×

【討論】例如$U$=x軸, $V$=z軸, $W$=span($[1,1,0]^T$).

[III]. (20%) 【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

5. If $A$ is an $n\times n$ matrix, then $A$ and $A^T$ have the same eigenvalues.

【分析】本題屬於題型XXX. 相關資料請參閱綜線CH12定理8a⑤.

【解】○

[III]. (20%) 【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

6. A basis of a vector space is an orthogonal set.

【分析】本題屬於題型06B. 相關資料請參閱綜線CH6定義16.

【解】×

[III]. (20%) 【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

7. Let $A$ be an $n\times n$ real matrix, then $A$ has rank $n^2$.

【分析】本題屬於題型08B. 相關資料請參閱綜線CH8定理15.

【解】×

【討論】rank$A$頂多是$n$.

[III]. (20%) 【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

8. An orthogonal set of vectors in a vector space are linearly independent.

【分析】本題屬於題型09A. 相關資料請參閱綜線CH9定理15.

【解】×

【討論】例如 { (0,0), (1,0)}為orthogonal set, 但不independent.
若此orthogonal set內都是非零向量, 則必線性獨立.　　(綜線CH9定理15)

[III]. (20%)　【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

9. Every diagonally dominant real matrix is positive definite.

【解】 ?

【討論】dominant並非通行的數學名詞. 出處待查.
H. Anton 的書將絕對值最大的特徵值稱為dominant eignevalue. 但還是沒有dominant real matrix 的說法.

[III]. (20%)　【清大92資應】

Mark ○ if the statements is true, and mark × otherwise.

10. Every real symmetric matrix can be diagonalized.

【分析】本題屬於題型13B. 相關資料請參閱綜線CH13定理15.

【解】○

[IV]. (30%)　【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

1. α is a scalar and $A$, $B$, and $C$ are matrices for which the indicated matrix operations are defined. Which on the following statements is false?

(a) $A(B+C)=AB+AC$

(b) $\alpha(AB)=A(\alpha B)$

(c) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

(d) $(AB)^{-1}$

(e) all of above.

【分析】本題屬於題型02A. 相關資料請參閱綜線CH2範例5.

【解】(c)

[IV]. (30%)　【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

2. Which one of the following statement is not equivalent to the rest for an $n\times n$ matrix $A$?

(a) $A$ is nonsingular

(b) $Ax=o$ has only the trivial solution

(c) $A$ is row equivalent to the idnetity matrix.

(d) $\det(A) \neq 0$

(e) The row vector of $A$ form a basis for $R^n$.

【分析】本題屬於題型02A. 相關資料請參閱綜線CH3定理18, CH4定理17, CH8定理17.

【解】(a)

[IV]. (30%)　【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

3. Given

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Which is $\det(A)$ ?

(a) –4 , (b) 0, (c) 8, (d) 16, (e) none of the above

【分析】本題屬於題型04B. 相關資料請參閱綜線CH4範例12.

【解】(b)

[IV]. (30%)　【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

4. Let $P_n$ denote the set of polynomials of degree less than $n$. Which of the following is a subspace of $P_4$.
 (a) The set of polynomials in $P_4$ of even degree.
 (b) The set of polynomials in $P_4$ of degree 3.
 (c) The set of polynomials in $P_4$ such that $P(0)=0$
 (d) The set of polynomials in $P_4$ having at least one real root
 (e) none of the above

【分析】本題屬於題型05B. 相關資料請參閱綜線CH5範例15.

【解】(c)　　(綜線CH6定理11)

【討論】(a) 還須補上零多項式. 因零多項式的degree無定義(或定義為負無限大).

(b) 不滿足封閉性. 例如: $(x^3+x)+(-x^3+x)=2x$

(c) 滿足封閉性: 若$P(0)=0$, $Q(0)=0$, 則 $(aP+bQ)(0)=aP(0)+bQ(0)=a0+b0=0$

(d)不滿足封閉性. 例如: $x^2-2x$與 $3x+1$ 都有實根, 但相加後的$x^2+x+1$沒有實根.

[IV]. (30%)　【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

5. Which one of the following statement is false?
 (a) $Ax=b$ is consistant if and only if $b$ is in the column space of $A$.
 (b) The rank of $A$ plus the nullyty of $A$ equals $m$, where $A$ is an $m\times n$ matrix.
 (c) The dimension of the row space of $A$ equals the dimension of the column space of $A$.
 (d) The null space of $A$ equals the orthogonal complement of $R(A^T)$.
 (e) The intersection of two orthogonal subspaces is the zero vector.

【分析】本題(a)(b)(c)屬於題型08E. (d)屬於題型11B. (e)屬於題型11C.

【解】(b)

【討論】(a)是定理　　(綜線CH8定理18)

(b)應該是等於$n$. (綜線CH8定理8)

(c)是定理 (綜線CH8定理13)

(d)是定理 (綜線CH11定理23)

(e)是定理 (綜線CH11定理16, CH11定義1)

[IV]. (30%) 【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

6. Let $u$, $v \in \mathrm{R}^n$, be orthonormal vectors, then $\|3u+4v\|_2=?$

(a) 5, (b) 7, (c) $5n$, (d) $7n$, (e) none of the above.

【分析】本題屬於題型09A. 相關資料請參閱綜線CH9定理8.

【解】(a)

【討論】$\|3u+4v\|_2^2$

$= (3u+4v)\cdot(3u+4v)$ (綜線CH9定義4)

$= 9\,u\cdot u + 12\,u\cdot v + 12\,v\cdot u + 16v\cdot v$ (雙線性條件, 綜線CH9定義2)

$= 9 + 16 = 25$ (orthonormal)

[IV]. (30%) 【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

7. Let $Q \in \mathrm{R}^{n\times n}$ be orthogonal, then $\|Q\|_2^2=?$

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) $n$, (e) $n^2$

【分析】本題屬於題型17A. 相關資料請參閱綜線附錄B定理23.

【解】(b).

[IV]. (30%) 【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

8. Let $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ have eignevalues 2, 4, ..., $2n$, then tr($A$)=?

(a) $n$, (b) $n^2$, (c) $n(n+1)$, (d) $n(n-1)$

【分析】本題屬於題型12A. 相關資料請參閱綜線CH13定理8.

【解】(c)

[IV]. (30%) 【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

9. Let $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$ have rank $r$, then dim(Null($A$))+dim(R($A$))=?

(a) $m-r$, (b) $n-r$, (c) $m$, (d) $n$, (e) none of the above

【分析】本題屬於題型08E. 相關資料請參閱綜線CH8定理8.

【解】(b)

[IV]. (30%) 【清大92資應】

Choose the best answer in the following questions.

10. Let $A \in \mathrm{R}^{3\times 3}$ have eigenvalues $\lambda(A) = \{1,2,5\}$, then $\lambda(A^{-1})$=?

(a) $\{0, 1, 4\}$,

(b) $\{-1, -2, -5\}$,

(c) $\{1, 8, 125\}$,

(d) $\{-1, -0.2, -0.5\}$

(e) $\{1, 0.2, 0.5\}$

【分析】本題屬於題型16A. 相關資料請參閱綜線CH16定理3.

【解】(e)