線性代數解析--台大92資工所

廖亦德 解

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章，
題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

[1]. (15%) 【台大92資工】

Determine the dimension of each of the following subspaces V.

(a) V=Span([1,2,3], [3,4,7], [5,–2,3])$\subseteq\mathbb{R}^3$,

(b) $V=\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\in\mathbb{R}^4: x_1+x_2+x_3+x_4=0, x_2+x_4=0\}\subseteq\mathbb{R}^4$,

(c) $V=U+W$, where U=Span([1,0,1,1],.[2,1,1,2])$\subseteq\mathbb{R}^4$ and
W=Span([0,1,1,0],.[2,0,1,2])$\subseteq\mathbb{R}^4$.

【分析】本題屬於題型06C. 相關類題請參閱綜線CH6範例6.

【解】(a) 由列運算求S : (綜線CH3範例4b)

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&7\\5&-2&-3\end{bmatrix}\sim\overset{\text{過程略}}{\cdots\cdots\cdots}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&0&-6\end{bmatrix}$$

$\therefore\ \dim V=3$ (綜線CH6定理23)

(b)

令 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$，則 $V=\ker A$. (綜線CH5定義19)

$\dim V=\text{nullity}(A)$ (綜線CH8定義5)

$=4-\dim \text{RSP}(A)$ (綜線CH8定理8)

$=4-2=2$ (綜線CH6定理23)

(c) V=Span([1,0,1,1],.[2,1,1,2], [0,1,1,0],.[2,0,1,2]) (綜線CH6定理5①)

由列運算 : (綜線CH3範例4b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \underset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\text{過程略}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ \dim V = 3$　　(綜線CH6定理23)

[2]. (15%)　　【台大92資工】

Find the point on the plane spanned by two vectors [1,1,1] and [–1,0,2] that is closest to the point [1,4,3].

【分析】本題屬於題型09B. 相關類題請參閱綜線CH9範例23.

【解法一】(最常見的正規解法)

先對 [1,1,1] , [–1,0,2] 做正交化,　　(綜線CH9定理16)

取得此平面的一組正交基底 [1,1,1] , (1/3)[–4,–1,5]　　(綜線CH9範例17)

爲計算方便, 可捨棄第二向量的係數(1/3)

所求爲　　(綜線CH9定理12)

$$\frac{[1,4,3]\cdot[1,1,1]}{[1,1,1]\cdot[1,1,1]}[1,1,1]+\frac{[1,4,3]\cdot[-4,-1,5]}{[-4,-1,5]\cdot[-4,-1,5]}[-4,-1,5]$$

$= [4/2,\ 5/2,\ 7/2]$

【解法二】(利用矩陣, 不經正交化直接解)

令 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

則所求爲 $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}v = \ldots.$　　(綜線CH9定理22)

$= [4/2,\ 5/2,\ 7/2]$

【解法三】(不經正交化, 也不用矩陣, 直接解)

令所求爲 $p = x[1,1,1] + y\,[-1,0,2]$, 則

$(x[1,1,1] + y\,[-1,0,2] - [1,4,3]) \cdot [1,1,1] = 0$

$(x[1,1,1] + y\,[-1,0,2] - [1,4,3]) \cdot [-1,0,2] = 0$　　(綜線CH9定理11b)

由分配律得

$3x + y - 8 = 0,$

$x + 5y - 5 = 0$

解得 x=5/2, y=1/2, 再代回原式得 $p = [4/2, 5/2, 7/2]$

【解法四】($\mathbb{R}^3$時用外積做最快)

$[1,1,1] \times [-1,0,2] = [2, -1, 1]$　　(綜線CH1定義11)

所求爲

$$[1,4,3] - \frac{[1,4,3] \cdot [2,-1,1]}{[2,-1,1] \cdot [2,-1,1]}[2,-1,1]$$　　(綜線CH1定理12a)

$= [4/2, 5/2, 7/2]$

[3]. (20%)　【台大92資工】

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Derive A^k for integer $k \ge 1$.

【分析】本題屬於題型16C及16B. 相關類題請參閱綜線CH16範例19及CH16範例5.

【解法一】先對A做對角化, 使$A=PDP^{-1}$, 則 $A^k=PD^kP^{-1}$, 再化簡即得.

(此法較慢, 詳情請參閱綜線CH16範例5)

【解法二】$\det(A-xI) = \ldots.. = (x-3)(x+3)$　　(綜線CH12定理13)

令 $x^k = q(x)(x-3)(x+3) + px + q$.　　(甲)

分別以 $x=3, -3$代入得

$3^k = 3p+q$, $(-3)^k = -3p+q$.

由Cramar's rule解得 $p = (3^k-(-3)^k)/6$, $q = (3^k+(-3)^k)/2$,

由甲式及Cayley-Hamilton定理:

$A^k = pA + qI = \ldots$ (綜線CH16定理18)

$$= (1/6)\begin{bmatrix} 5\cdot 3^k + (-3)^k & 5\cdot 3^k - 5\cdot(-3)^k \\ 3^k - (-3)^k & 3^k + 5\cdot(-3)^k \end{bmatrix}$$

(Hint: 應使用k=0,1代入驗算)

[4]. (5%) 【離散】

[5]. (5%) 【離散】

[6]. (5%) 【離散】

[7]. (5%) 【離散】

[8]. (5%) 【離散】

[9]. (5%) 【離散】

[10]. (5%) 【離散】

[11]. (5%) 【離散】

[12]. (5%) 【離散】

[13]. (5%) 【離散】