線性代數解析--交大92資科所

廖亦德 解

參考章節使用簡稱, 例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章.

題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

/***\

考題評論: 此份考題命題相當靈活, 對讀書不求甚解的人很不利.

***/

[1]. (5%) 【交大92資科】

For each statement below, indicate whether it is true or not.

(a) If A is a symmetric matrix then rank(A)=rank(A^2).

(b) If Ax and Ay are linearly independent then x and y are linearly independent.

(A is a matrix and x, y are vectors.)

(c) If $AB=O$ then the null space of A contains the column space of B.

(d) If A and B are 2×2 matrices such that $ABAB=O$, then $BABA=O$.

(e) If $A=BC$ where B is a 5×4 matrix and C is a 4×5 matrix then A is invertible.

【分析】本題(a)屬於題型13D. 相關定理請參閱綜線CH11定理22.

本題(b)屬於題型06A. 相關定理請參閱綜線CH8定理11a.

本題(c)屬於題型11A. 此題即爲綜線CH11定義10要訣4.

本題(d)尚待研究.

本題(e)屬於題型08D. 相關類題請參閱綜線CH8定理16a.

【解】(a) True, (b) True , (c) True, (d) ? (e) False

【討論】

(a) 對A作對角化, 使$A=PDP^{-1}$, D=diag(k_1, k_2, ..., k_n) (綜線CH13定理15)

則 $A^2=(PDP^{-1})^2=PD^2P^{-1}=P\text{diag}(k_1^2, k_2^2, ..., k_n^2)P^{-1}$ (綜線CH16定理3)

rank(A)=rank(D) (綜線CH8定理16)

=[k_1, ..., k_n中不等於零的個數] (CH6定理23, 綜線CH8範例14a)

rank(A^2)=rank(D^2)=[k_1^2, ..., k_n^2中不等於零的個數]

=[k_1, ..., k_n中不等於零的個數]=rank(A)

[Note] 本題是利用實數對稱矩陣必可正交對角化的性質, 許多教科書及考題都是只在實數系討論, 本題應該是也套用這個假設. 但若要在複數系討論, 這個題目就會變成一個有待做研究的問題. 即使答案能確定, 也超出範圍.

(b) 依定義證明如下: (綜線CH6定義9)

若 $cx+dy=o$

兩邊左乘A得 $A(cx+dy)=o$,

∴ $cAx+dAy=o$ (綜線CH2定理9)

再由Ax, Ay的獨立性即得c=0, d=0. (綜線CH6定義9)

(c) 證明如下:

若 $x\in$column space of B,

則存在行向量 y 使 $x=By$. (綜線CH5定理17)

∴ $Ax=ABy=Oy=o$.

∴ $x\in$null space of A (綜線CH5定義19)

(d) 本題尚待研究. 歡迎來信討論.

(e) 反證如下:

rank(A)=rank(BC)

$\le$ rank(B) (綜線CH8定理16)

≤ 4 (綜線CH8定理15)

∴ A 不可逆 (綜線CH8定理17)

[2]. (5%) 【交大92資料】

Let F be the space of all functions from R to R, E be the subspace of F that contains all functions satisfying $f(x)=f(-x)$, and O be the subspace of F that contains all functions satisfying $f(x) = -f(-x)$, show that $F=E+O$.

【分析】本題屬於題型11A. 相關類題請參閱綜線CH11範例5.

【解】本題考定理證明, E中的函數稱為even function, O中的函數稱為odd function, 證明請參閱CH11範例5.

==

For problems 3~5, give your answers directly.
No explanation or computation is necessary.

==

[3]. (5%) 【交大92資科】

Let $A = \begin{bmatrix} 0 & b & b+c \\ a & a+b & b \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$, where $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Factor the matrix A into $PA=LDL^{T}$, where P is a permutation matrix, L is a lower triangular matrix, and D is a diagonal matrix.

【分析】本題屬於題型03E. 相關類題請參閱綜線CH3範例30,CH3範例28a.

【解】

$$\begin{bmatrix} 0 & b & b+c \\ a & a+b & b \\ a & a & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ (-a) \qquad \longleftarrow l_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & b & b+c \\ 0 & b & b \\ a & a & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ (-b) \qquad \longleftarrow l_2 \\ \qquad\qquad \longleftarrow l_1 \end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & b \\ a & a & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow l_3 \\ \longleftarrow l_2 \\ \longleftarrow l_1 \end{matrix}$$

令$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

則 $PA=LU$, 其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

再繼續變形:

$$U=\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=DL^T$$

(綜線CH3範例14b)

[4]. (5%) 【交大92資科】

Suppose the complete solution to the equation $Ax=[3\ 6\ 9]^T$ is

$x=[3\ 0\ 0\ ]^T+s[1\ 0\ 1\ ]^T+t[\ 0\ 1\ 0\ ]^T$

Find A .

【分析】本題屬於題型03A. 相關類題請參閱綜線CH3範例7.

【解】設$x=[x_1, x_2, x_3]^T$, 此方程式之通解為

$x_1=3+s$, $x_2=t$, $x_3=s$

由作答法可知取x_2, x_3為自由變數t,s.

其分隔矩陣化爲列簡梯陣爲

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(綜線CH3範例7)

爲求原先的常數項矩陣 $[3 \quad 6 \quad 9]^T$, 可反向做列運算:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \quad (3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right]$$

$$\therefore\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

[5]. (5%) 【交大92資科】

Define the square matrices

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & & 0 \\ -1 & & \cdots\cdots & & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & & \cdots\cdots & & 1 \\ 0 & 0 & & -1 & a_n \end{bmatrix}, n \geq 1$$

and let $d_n = \det A_n$. Find a recurrence relation for d_n. (Don't solve it.)

【分析】本題屬於題型04B. 相關類題請參閱綜線CH4範例13.

【解】$d_n = a_n d_{n-1} + d_{n-2}$

爲求清晰, 以n=5爲例:

$$d_5=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_5 \end{vmatrix}$$

(末行降階)

$$=(-1)\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}+a_5\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$$ (綜線CH4定理11)

(第一個行列式末列降階)

$= d_3+a_5d_4$ (綜線CH4定理11)

===

以下各計算題, 只需寫出答案.

===

[6]. (5%) 【交大92資科】

(1) In R^3, let T be the orthogonal projection onto the subspace S , where

S=span{(1, 1, 0), (1, 1, 1)}

Find the standard matrix representation A for this linear transformation.

(2) As in part (1), find the orthogonal projection of (1,0,0) onto the subspace S.

【分析】本題屬於題型09B. 本題有4種解法, 類題可參閱台大92資料[2]之解析.

【解】(1) 先利用外積求S的法向量 $(1, 1, 0) \times (1, 1, 1)=(1, -1, 0)$. (綜線CH1定理11a)

令$d=(1, -1, 0)$, $v=(x, y, z)$, 則

v對S的正投影p

$= v - \dfrac{v \cdot d}{d \cdot d} d$ (綜線CH1定理12a)

$= (x, y, z) - ((x - y)/2)(1, -1, 0)$

$= (x/2+y/2, x/2+y/2, z)$

令 $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 則 $p^T = Pv^T$

∴ P為所求之投影矩陣. (綜線CH7定理9a)

(1) [另解]: (綜線CH9定理22)

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 則 $P = A(A^TA)^{-1}A^T = \ldots. = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(1) [另解]: 利用綜線CH9定理11b求解. (參閱綜線CH9範例11c)

(1) [另解]: 先做正交化(綜線CH9定理16), 再套用正投影公式(綜線CH9定理12)

(2) 套用上題公式得 (1/2, 1/2, 0)

[7]. (4%) 【交大92資科】

Let $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ and let T be the linear transformation given by $T(x)=Ax$.

Find (1) kernel(T), (2) nullity(T), (3) range(T), (4) rank(T),

【分析】本題屬於題型06C. 相關類題請參閱綜線CH6範例23a,24a.

【解】(1) 由列運算 : (綜線CH3範例4b)

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/4 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

kernel(T)=[$Ax=o$的解空間] (綜線CH8定義5)

$=\{[\,-(11/4)t, (3/2)t, t\,]^T \mid t$爲純量 $\}$ (綜線CH3範例7)

$=\{[\,-11k, 6k, 4k\,]^T \mid k$爲純量 $\}$

(2) nullity(T)=dim kernel(T)=1

(3) pivot爲於第1,2行,

∴ A的第1,2行形成A的column space的基底. (綜線CH6定理24)

∴ range(T)=span$\{[0, 4]^T, [-2, 0]^T\}$=span$\{[0, 1]^T, [1, 0]^T\}=R^2$

(4) rank(T)=dim range(T)=2

[8]. (2%) 【交大92資料】

In R^3, let B_1 and B_2 be two bases, where

$B_1=\{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)\}$ and

$B_2=\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)\}$.

Find the transition matrix from B_1 to B_2.

【分析】本題屬於題型06D. 相關類題請參閱綜線CH6範例34.

【解】考慮標準基底 $S=\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

令 $P_1=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$

則 $\forall v\in R^3$, $[v]_S=P_1[v]_{B_1}$, $[v]_S=P_2[v]_{B_2}$. (CH6定理33)

∴ $[v]_{B_2}=P_2^{-1}[v]_S=P_2^{-1}P_1[v]_{B_1}$

∴ 所求之座標變換矩陣爲 $P_2^{-1}P_1$ (CH6定義33)

[9]. (2%) 【交大92資料】

In R^3, find the rotation matrix that rotates a point 30° about the y-axis.

【分析】本題屬於題型01A. 相關類題請參閱綜線附錄D範例23.

【解】

$$\begin{bmatrix} \cos 30° & 0 & \sin 30° \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30° & 0 & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{1/2}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3^{1/2}/2 \end{bmatrix}$$

[10]. (4%) 【交大92資料】

Are the following two matrices similar? If so, find a matrix P such that $B=P^{-1}AP$.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型07D. 相關類題請參閱綜線CH15範例15.

【解】(1) Yes. 證明如下:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(綜線CH3範例14b)

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (綜線CH3範例23a)

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (綜線CH13定理1a)

(Note: 本題的思考線索是在CH13定理7a)

(2) No. 此因兩者爲不同型的Jordan form (綜線CH15定理14)

---

[11]. (5%) 【交大92資料】

Find a basis B for the domain of T such that the matrix of T related to B is diagonal.

$T : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $T(x, y)=(x+y, x-y)$

【分析】本題屬於題型12C. 相關類題請參閱綜線CH12範例17a.

【解】 取標準基底, 則 T的矩陣表示爲

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

依普通的對角化程序, (細節略)

解得特徵値0, 2及對應的特徵向量$[1, -1]^T$, $[1, 1]^T$.

取$B=\{(1, -1), (1, 1)\}$, 則 $[T]_B=\mathrm{diag}(0, 2)$. (綜線CH12定理16)

---

[12]. (4%) 【交大92資料】

(1) For an invertible matrix A, prove that A and A^{-1} have the same eigenvectors.

How are the eigenvalues of A^{-1} related to the eignevalues of A ?

(2) Let A be a diagonalizable matrix with n real eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

What is the determinant of A? Prove your answer briefly.

【分析】本題屬於題型16A. 相關類題請參閱綜線CH16定理3.

【解】(1) 可逆矩陣的特徵值必不爲零. (綜線CH14定理2b)

若 $Av=\lambda v$, 則$v=A^{-1}(\lambda v)=\lambda A^{-1}(v)$,

$\therefore$ $A^{-1}(v)=\lambda^{-1}v$.

$\therefore$ v爲A的特徵向量 $\Longrightarrow$ v爲A^{-1}的特徵向量 (綜線CH12定義1)

同理可證反向亦成立.

由前述證明過程可知

$\therefore$ λ爲A的特徵值 $\Longrightarrow$ λ^{-1}爲A^{-1}的特徵值

(2) 由題意得 $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n)P^{-1}$

$\therefore$ $\det A=\det(P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n)P^{-1})$

$=\det(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n))$ (綜線CH7定理22)

$=\lambda_1\lambda_2\ldots.\lambda_n$ (綜線CH4定理4a)