線性代數解析--台大93電機所(丙組) 廖亦德 解

本檔案保留著作權，禁止任何未授權之散佈.

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章，
題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

[1]. (30%) 【台大93電機丙】(論證是非題)

Determine if the following statements are true or false(1% each) and provide a short proof if it is true or any explanation/counterexample if it is false(2% each).

(a) If the only solution to $Ax=o$ is $x=o$, then the rows of A are linearly independently.

(b) If A and B are matrices such that $AB=I_n$ for some n, then both A and B are invertible.

(c) If $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ is linear, then its standard matrix has size 3×2.

(d) For any square matrix A, $\det A^T = -\det A$.

(e) The dimension of the null space of a matrix equals the rank of the matrix.

(f) If T is a linear operator on $\mathbb{R}^n$, B is a basis for $\mathbb{R}^n$, C is the matrix whose columns are vectors in B, and A is the standard matrix of T, then $[T]_B = CAC^{-1}$.

(g) If an $n\times n$ matrix has n distinct eigenvectors, then it is diagonalizable.

(h) If P is an $n\times n$ matrix such that $\det P=\pm1$, then P is an orthogonal matrix.

(i) In any vector space, $av=o$, where $a\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}^n$, implies that $v=o$.

(j) A matrix representation of a linear operator on $M_{m\times n}$, the set of all $m\times n$ matrices, is an $m\times n$ matrix.

【分析】本題(a)屬於題型06A. 相關類題請參閱綜線CH6定理15. (--> CH6,Ex15.2)

本題(b)屬於題型02B. 相關類題請參閱綜線CH8定理17 (-> CH8, Ex16a.3)

本題(c)屬於題型07B. 相關類題請參閱綜線CH7範例5 (--> CH7, Ex9.1)

本題(d)屬於題型04A. 相關類題請參閱綜線CH4定理5, CH4定理7 (-->CH4, Ex5.1)

本題(e)屬於題型08E. 相關類題請參閱綜線CH8定理8. (-->CH8, Ex8.2)

本題(f)屬於題型07C. 相關類題請參閱綜線CH7定理19, 範例20 (-->CH7,Ex19.1)

本題(g)屬於題型12B. 相關類題請參閱綜線CH12定理16, 定理21 (-->CH12,Ex16.1)

本題(h)屬於題型13A. 相關類題請參閱綜線CH13定理1a (-->CH2,Ex25.4)

本題(i)屬於題型05A. 相關類題請參閱綜線CH5定理8的證明 (-->CH5,Ex8.3)

本題(j)屬於題型07B. 相關類題請參閱綜線CH7範例14. (-->CH7,Ex14.3)

【解】(a) False. 反例如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies x_1=0, x_2=0$$

但矩陣的三個row並非independent.

[補充說明] 本題將rows改爲columns就成立. (綜線CH6定理15)

(b) False. 反例如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = I_2$$

但兩個矩陣都不是invertible

[補充說明] 本題若加上"方陣"的條件就成立. (綜線CH8定理17)

(c) False.

依定義應是2×3. (綜線CH8定義9, 定理9a)

(d) False.

反例舉$A=I_2$即可.

[補充說明] 應是 $\det A^T = \det A$. (綜線CH4定理5)

(e) False. 反例如下:

對$A=I_2$, dim Ker(A)=0, rank(A)=2, 兩者並不相等.

[補充說明] 應是 dimKer(A)+rank(A)=A的寬度 (綜線CH8定理8)

(f) False.

應是$[T]_B = C^{-1}AC$. (綜線CH7定理19)

反例可取 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

請自行檢驗 $[T]_B = C^{-1}AC \neq CAC^{-1}$

[補充說明] 反例舉法可參考綜線CH3定理15, 定理24.

(g) False.

反例可取 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, A有eigenvector $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$

但A不可對角化. (綜線CH15定義7)

[補充說明] 要有n個線性獨立的特徵向量才行. (綜線CH12定理16)

(h) False. 反例如下:

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$, 則 $\det A=1$, 但A並非orthogonal matrix. (綜線CH2定義25)

[補充說明] 相關類題請參閱綜線CH13定理3

(i) False. 反例如下:

$0\,(1, 2)=(0,0)$, 但$(1,2) \neq (0,0)$.

[補充說明] 本題若加上 $a\neq 0$ 的條件就成立. (綜線CH5定理8)

(j) False.

$\dim(M_{m\times n})=mn$, $M_{m\times n}$上線興算子的矩陣表示應該是$mn\times mn$矩陣. (綜線CH7定義9)

[2]. (20%) 【台大93電機丙】

Given the matrix A and a vector b as follows:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & -8\\ -2 & 1 & 2 & 9\\ 3 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}-3\\ 5\\ -8\end{bmatrix}$$

(a) Please find an LU decomposition of A.　(10%)

(b) Please solve $Ax=b$, where x is 4×1 vector. (10%)

【分析】本題屬於題型03E. 相關類題請參閱綜線CH3範例28.

【解】(a) 先做列運算:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & -8\\ -2 & 1 & 2 & 9\\ 3 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & -8\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & 3 & 8 & 25\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & -8\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & -8\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$ (綜線CH3定理27)

(b) 原式爲 $LUx=b$,

令 $y=Ux$,

先解(過程略) $Ly=b$得出 $y=[-3, -1, -2]$,

再解(過程略) $Ux=y$得出 $x=[-2+t, 3-3t, -1-2t]$,　t爲任意常數.

[3]. (30%)　【台大93電機丙】

Let T and U be the linear operators on $\mathbb{R}^3$ defined by:

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x_1+2x_3\\x_1+x_2\\-x_2+x_3\end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad U\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2x_1+5x_2-x_3\\-3x_1+6x_2-x_3\\-x_1+x_2+2x_3\end{bmatrix},$$

and let $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, where $b_1=[1 \quad 1 \quad 0]^T$, $b_2=[1 \quad 1 \quad 1]^T$, $b_3=[3 \quad 2 \quad 1]^T$.

(a) Find the standard matrices of T and U. (5%)

(b) Find $[T]_B$, $[U]_B$ and $[UT]_B$, i.e., the matrix representations of T, U and UT with respect to B, respectively. (15%)

(c) Determine a relationship among $[T]_B$, $[U]_B$ and $[UT]_B$. (10%)

【分析】本題屬於題型07B及07C. 相關類題請參閱綜線CH7範例10, 範例20.

【解】(a)

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x_1+2x_3\\x_1+x_2\\-x_2+x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$U\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2x_1+5x_2-x_3\\-3x_1+6x_2-x_3\\-x_1+x_2+2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&5&-1\\-3&6&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$\therefore$ T, U的standard matrices分別為

$$[T]_S=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}, [U]_S=\begin{bmatrix}-2&5&-1\\-3&6&-1\\-1&1&2\end{bmatrix}$$ (綜線CH7定理9a)

(b)

令 $P=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$, 則

$[T]_B=P^{-1}[T]_SP=....=\begin{bmatrix}6&3&12\\2&1&5\\-3&-1&6\end{bmatrix}$ (綜線CH7定理19)

$[U]_B=P^{-1}[U]_SP=....=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (綜線CH7定理19)

$[UT]_B=[U]_B[T]_B$ (綜線CH8定理23)

$=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&3&12\\2&1&5\\-3&-1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&9&36\\4&2&10\\-3&-1&6\end{bmatrix}$

(c) $[UT]_B=P^{-1}[UT]_SP=P^{-1}[U]_S[T]_SP$ (綜線CH7定理19, CH8定理23)

$=P^{-1}[U]_SPP^{-1}[T]_SP=[U]_B[T]_B$ (綜線CH7定理19)

[4]. (20%) 【台大93電機丙】

Given a matrix A and a set of matrices S as follows:

$A=\begin{bmatrix}5&3\\1&-2\end{bmatrix}$, $S=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&2\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$

(a) Determine if S is a linearly independent subset of $M_{2\times2}$, the vector space of all 2×2 matrices. (10%)

(b) Represent the matrix A as a linear combination of the vectors in the set S. What are the corresponding coefficients? (10%)

【分析】本題(a)屬於題型06A. 相關類題請參閱綜線CH6範例11.

本題(b)屬於題型06D. 相關類題請參閱綜線CH6範例29.

【解】 考慮 $H: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ 定義如

$$H\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=[\,a, b, c, d\,]^T$$

顯然H是個同構映射. (綜線CH8定義27)

因此可在$\mathbb{R}^4$中觀察$M_{2\times 2}$的各種性質.

(a) $H(S)=\{[1, 1, 1, 0]^T, [0, 0, 1, 1]^T, [0, 2, 0, -1]^T, [0, 1, 0, 1]^T\}$

若 $x[1, 1, 1, 0]^T+y\,[0, 0, 1, 1]^T+z\,[0, 2, 0, -1]^T+w\,[0, 1, 0, 1]^T=[0,0,0,0]^T$

解方程式得 $x=0, y=0, z=0, w=0$.

∴ $H(S)$線性獨立. (綜線CH6定義9)

∴ S線性獨立. (綜線CH8定理11b)

(b)

設 $$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+w\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

等號兩邊套用H, 則

$[\,5, 3, 1, -2]^T= x[1, 1, 1, 0]^T+y\,[0, 0, 1, 1]^T+z\,[0, 2, 0, -1]^T+w\,[0, 1, 0, 1]^T$

解方程式得 $x=5, y=-4, z=-4/3, w=2/3$.