線性代數解析--台大93資工所

廖亦德 解

本檔案保留著作權, 禁止任何未授權之散佈.

參考章節使用簡稱, 例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章,
題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

[1]. (4%) 【台大93資工】(是非題)

The number of independent row vectors in a matrix is the same as the number of independent column vectors.

【分析】本題屬於題型08C. 相關類題請參閱綜線CH8定理14.

【解】True. 此即rank定理. (綜線CH8定理13)

[2]. (4%) 【台大93資工】(是非題)

If H is a row-echelon form of a matrix A, then the nonzero column vectors in H form a basis for the column space of A.

【分析】本題屬於題型06C. 相關類題請參閱綜線CH6範例24a.

【解】False. 反例如下:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

它的三個非零行並不構成行空間的基底.

[3]. (4%) 【台大93資工】(是非題)

rank(AC) ≤ rank(A), where A and C are matrices such that the product AC is defined.

【分析】本題屬於題型08C. 相關類題請參閱綜線CH8定理15.

【解】True. 此爲定理. (綜線CH8定理16)

[4]. (4%) 【台大93資工】(是非題)

Let V and W be vector spaces of dimensions n and m, respectively. A linear transformation $T: V \to W$ is invertible if and only if $m=n$.

【分析】本題屬於題型08E. 相關類題請參閱綜線CH8定理11.

【解】False. 反例如下

$m=n=2$, $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定義如 $T(x, y)=(0,0)$.

[5]. (4%) 【台大93資工】(是非題)

Let v and w be independent vectors in V, and let $T:V\to W$ be a one-to-one linear transformation on V to W, then $T(v)$ and $T(w)$ are independent vectors in W.

【分析】本題屬於題型08E.

相關類題請參閱綜線CH8定理11a, 定理11b, 定理11c, 定理11d.

【解】True. 此爲定理. (綜線CH8定理11b)

[6]. (10%) 【台大93資工】

Let $V \subseteq \mathbb{R}^n$ be a subspace. Let $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be the linear transformations defined respectively be projecting onto and reflecting across V. What are the eigenvalues and eigenvectors of T and S, respectively?

【分析】本題出得比較靈活, 考生對投影與鏡射須有通盤性的了解.

本題屬於題型11A. 相關類題請參閱綜線CH11定理14的證明內容.

【解】設$\dim V=r$, 則$\dim(V^{\perp})=n-r$. (綜線CH11定理17)

設$\{v_1, v_2, ..., v_r\}$爲V的基底, 並設$\{w_{r+1}, w_{r+2} ..., w_n\}$爲$V$的基底. (綜線CH6定理19)

則 $\{v_1, v_2, ..., v_r, w_{r+1}, w_{r+2} ..., w_n\}$爲$\mathbb{R}^n$的基底. (綜線CH11定理17,定理6)

對任意 $u\in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的一組係數使

$u=k_1v_1+k_2v_2+ ...+ k_rv_r+ k_{r+1}w_{r+1}+ k_{r+2}w_{r+2} ...+k_nw_n$ (綜線CH6定義28)

依題意T, S運作如下:

$T(u)=k_1v_1+k_2v_2+ ...+ k_rv_r$

$T(u)=k_1v_1+k_2v_2+ ...+ k_rv_r - k_{r+1}w_{r+1} - k_{r+2}w_{r+2} ... -k_nw_n$

(註: T其實是正投影, S其實是正鏡射) (綜線附錄D定義8)

T的eigenvalue爲1, 0,

1的eignevectors爲V中的任意非零向量.

0的eignevectors爲$V^{\perp}$中的任意非零向量. (綜線CH11定理14)

S的eigenvalue爲1, −1,

1的eignevectors爲V中的任意非零向量.

−1的eignevectors爲$V^{\perp}$中的任意非零向量. (綜線附錄D定理10)

[7]. (20%) 【台大93資工】

Suppose A is an $n\times n$ matrix with the property that $A^2=A$. Let $a_1, a_2, ..., a_n\in\mathbb{R}^n$ be the column vectors of A and $A_1, A_2, ..., A_n\in\mathbb{R}^n$ be the row vectors of A.

Let $C(A)=\text{span}(a_1, a_2, ..., a_n)$ and $R(A)=\text{span}(A_1, A_2, ..., A_n)$ be the column space and the row space of A respectively.

Define $E(A)=\{x\in\mathbb{R}^n|\ x=Ax\}$, $F(A)=\{x\in\mathbb{R}^n|\ x=u-Au$ for some $u\in\mathbb{R}^n\}$.

Find the following four sets: $C(A)\cap E(A)$, $N(A)\cap F(A)$, $C(A)\cap N(A)$, $C(A)+N(A)$.

【分析】本題題目略有瑕疵. $N(A)$未定義, $R(A)$定義了卻沒有用到. 不過依上下文可判定 $N(A)=\{x\in\mathbb{R}^n|\ Ax=o\}$, 就是$A$的核空間.

本題屬於題型11A. 相關類題請參閱綜線CH11定理12.

【解】由$A^2=A$得知 $\mathbb{R}^n=\text{CSP}A\oplus\ker A$, 即 $\mathbb{R}^n=C(A)\oplus N(A)$. (綜線CH11定理12)

所以 $C(A)\cap N(A)=\{o\}$, $C(A)+N(A)=\mathbb{R}^n$. (綜線CH11定義1)

$E(A)=\{x\in\mathbb{R}^n|\ (I-A)x=o\}=N(I-A)$

$=C(A)$, (綜線CH11定理12)

$F(A)=\{x\in\mathbb{R}^n|\ x=(I-A)u$ for some $u\in\mathbb{R}^n\}$

$=C(I-A)$ (綜線CH5定理17)

$=N(A)$ (綜線CH11定理12)

$\therefore$ $C(A)\cap E(A)= C(A)$, $N(A)\cap F(A)=N(A)$.

[8]. (5%) 【離散】

[9]. (5%) 【離散】

[10]. (5%) 【離散】

[11]. (5%) 【離散】

[12]. (5%) 【離散】

[13]. (10%) 【離散】

[14]. (5%) 【離散】

[15]. (5%) 【離散】

[16]. (5%) 【離散】