線性代數解析--台大94資工所 廖亦德 解

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章,
題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

Note that for problems 1-15, we consider only matrices with real values.

[1]. (3%) 【台大94資工】

What is the determinant of

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

(A) 70, (B) –70, (C) 65, (D) –65, (E) 85

【分析】本題屬於題型04B. 相關類題請參閱綜線CH4範例12.

【解】C.

【討論】

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(第4行的–2倍加入第一行)}$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(第4列降階展開)}$$

$$=-5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$ (第3列降階展開)

$=(-5)(2-15)=65$

[2]. (3%) 【台大94資工】

If $\mathbf{v}=[1, 2, 3, 4, 5]^T$, what is the rank of $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$?

(A) 1, (B)2, (C)3, (D)0, (E) Not well defined

【分析】本題屬於題型08B. 相關類題請參閱綜線CH8定理16B.

【解】A.

[3]. (3%) 【台大94資工】

For the same $\mathbf{v}$ in problem 2, what is the rank of $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$

(A)1, (B)2, (C)3, (D)0, (E) Not well defined

【分析】本題屬於題型08B. 相關類題請參閱綜線CH8定理16B.

【解】A.

[4]. (3%) 【台大94資工】

Which of the following is incorrect?

(A) Any $n+1$ different nonzero points in R^n must be linearly dependent.

(B) In R^2 any two linearly dependent vectors must be on a straight line.

(C) Let A be an $m\times n$ matrix with $m>n$ and $\mathbf{b}$ be an $m\times 1$ vector. Then $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ may have multiple solutions.

(D) Let A be an $m\times n$ matrix with $m<n$ and $\mathbf{b}$ be an $m\times 1$ vector. Then $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ must have at least one solution.

(E) Let A be any 5×4 matrix and I be the 5×5 identity matrix. Then $I+AA^T$ is invertible.

【分析】本題(A)(B)屬於題型06A. 本題(C)(D)屬於題型03B. 本題(E)屬於題型13D.

【解】D 為 incorrect .

【討論】(A) 此為定理. (綜線CH6定理14)

(B) 此為定理. (綜線CH6定理10要訣1)

(C) 舉例如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 有無限多組解

(D) 反例如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$ 無解

(E) 證明如下:

AA^T是實數正半定5×5矩陣, (綜線CH10定理26)

可取實數正交矩陣U, 使 $AA^T=U\text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)U^{-1}$,

且 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 都 ≥ 0 (綜線CH13定理15,CH13定理17c)

所以 $(I+AA^T) = UIU^{-1}+U\text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)U^{-1}$

$= U(I+\text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5))U^{-1}$

$= U\text{diag}(1+k_1, 1+k_2, 1+k_3, 1+k_4, 1+k_5)U^{-1}$

所以 $\det(I+AA^T)=\det(\text{diag}(1+k_1, 1+k_2, 1+k_3, 1+k_4, 1+k_5))$

(綜線CH4定理6a)

$=(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)(1+k_4)(1+k_5)>0$

所以 $(I+AA^T)$ 可逆. (綜線CH4定理17)

[5]. (3%) 【台大94資工】

Which of the following is incorrect?

(A) If A, B are invertible, then $(AB)^{-1}$ exists and $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(B) trace($(A+B)C$)=trace(AC)+trace(BC)

(C) det(AB)=det(A)det(B)

(D) trace(AB)=trace(A)trace(B)

(E) If A, B are positive definite, then so is $A+B$

【分析】本題(A)屬於題型02A. 本題(B)(D)屬於題型02C. 本題(C)屬於題型04A.
本題(E)屬於題型10C.

【解】D 為 incorrect .

【討論】(A) 此為定理. (綜線CH2定理12)

(B) $\mathrm{tr}((A+B)C)=\mathrm{tr}(AB+AC)$ (分配律, 綜線CH2定理9)

$= \mathrm{tr}(AB)+\mathrm{tr}(AC)$ (綜線CH2定理28)

(C) 此為定理. (綜線CH4定理6)

(D) 無此定理, 反例可隨便舉.

(E) 此為定理. (綜線CH10定理20)

[6]. (3%) 【台大94資工】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Which of the following symmetrix matrix B satisfies

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}\in R^3$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型10A.

【解】E .

【討論】B為A的對稱部. (綜線CH10定理17b)

[7]. (3%) 【台大94資工】

Give an $n \times n$ matrix A written as

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}.$$

where B is $n_1 \times n_1$, C is $n_1 \times n_2$, D is $n_2 \times n_2$, O is $n_2 \times n_1$, and $n = n_1 + n_1$. Assume B and D are invertible and O is a zero matrix. Then what is A^{-1} ?

(A) $\begin{bmatrix} B^{-1} & C^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ C^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -B^{-1}CD^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$ (E) A may not be always invertible.

【分析】本題屬於題型02A.

【解】D .

【討論】此為定理. (綜線CH2定理13)

[8]. (3%) 【台大94資工】

Given

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Let $\lambda_1 > \lambda_2$ be A's eignevalues. What is $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$?

(A) $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型12C.

【解】C .

【討論】特徵多項式為

$x^2-(1.2)x+(0.2)$ (綜線CH12定理13)

$=(x-1)(x-0.2)$

[9]. (3%) 【台大94資工】

Following problem 8, what are A's eigenvectors associated with

$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$? Each eigenvector is scaled to have length one.

(A) $\begin{bmatrix} 2^{1/2}/3^{1/2} \\ 1/3^{1/2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1/3^{1/2} \\ 2^{1/2}/3^{1/2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1/3^{1/2} \\ 2^{1/2}/3^{1/2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2^{1/2}/3^{1/2} \\ -1/3^{1/2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1/2^{1/2} \\ 1/2^{1/2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1/2^{1/2} \\ -1/2^{1/2} \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1/5^{1/2} \\ 2/5^{1/2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2/5^{1/2} \\ 1/5^{1/2} \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型12C. 相關類題請參閱綜線CH範例10,11.

【解】 D.

【討論】對特徵值1, 解 $(A-1I)\mathbf{v}=\mathbf{o}$ 得 $\mathbf{v}=\{t[1, 1]^T |\ t\in R\}$ (綜線CH12範例10)

取單位長的特徵向量 $\pm [1/2^{1/2}, 1/2^{1/2}]^T$

對特徵值0.2, 解 $(A-0.2I)\mathbf{v}=\mathbf{o}$ 得 $\mathbf{v}=\{t[-1, 1]^T |\ t\in R\}$ (綜線CH12範例10)

取單位長的特徵向量 $\pm [-1/2^{1/2}, 1/2^{1/2}]^T$

[10]. (3%) 【台大95資工】(複選題)

Assume the answer of problem 9 are $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. If $\mathbf{x}=[\ 4, 0\ ]^T$ and we represent it as

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2$$

then what are α_1 and α_2 ?

(A) $(3^{1/2}, -3^{1/2})$ (B) $(2 \cdot 2^{1/2}, -2 \cdot 2^{1/2})$ (C) $(2 \cdot 2^{1/2}, 2 \cdot 2^{1/2})$

(D) $(3^{1/2}, 3^{1/2})$ (E) $(3^{1/2}, 2 \cdot 3^{1/2})$

【分析】本題屬於題型06D. 相關類題請參閱綜線CH9範例12a.

【解】C.

【討論】依 $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2$ 之數值展開解α_1, α_2 即可.

但本題$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, 剛好正交, 所以可以不必用列運算解方程式:

原式兩邊對$\mathbf{v}_1$做內積得 $2 \cdot 2^{1/2} = \alpha_1$

原式兩邊對$\mathbf{v}_2$做內積得 $2 \cdot 2^{1/2} = \alpha_2$

[11]. (4%) 【台大94資工】

Following problems 8-10, what is $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{x}$?

(A) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1/2^{1/2} \\ 1/2^{1/2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1/3^{1/2} \\ 2^{1/2}/3^{1/2} \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 2^{1/2}/3^{1/2} \\ -1/3^{1/2} \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型16B. 相關類題請參閱綜線CH16範例5.

【解】B.

【討論】令$U=[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, 則 U為正交矩陣,

且 $A=U\mathrm{diag}(1, 0.2)U^T$.

所以 $A^n=U\mathrm{diag}(1, 0.2^n)U^T$

所以 $\lim(A^n\mathbf{x})=U\mathrm{diag}(1, 0)U^T\mathbf{x}=...=[2, 2]^T$

[12]. (4%) 【台大94資工】

Consider an $n\times n$ symmetric matrix A. If A is positive definite, then which of the following properties is wrong? If you think all are correct, select E.

(A) $A_{ii} > 0, \forall i$

(B) A is invertible

(C) $A_{ii}+A_{jj}-2A_{ij} >0, \forall i \neq j$

(D) $A_{ii}A_{jj}-A_{ij}^2 >0, \forall i \neq j$

(E) All are correct.

【分析】本題屬於題型10C. 相關類題請參閱綜線CH10定理26a.

【解】E.

【討論】(A) 此為定理. (綜線CH10定理26a)

(B) 此為定理. (綜線CH10定理22)

(D) A中由第i, j行及第i, j列所形成的子矩陣仍正定 (綜線CH10定理26a)

它的行列式是正數. (綜線CH10定理26a)

(C) 證明如下:

由(A)(D)得知 $A_{ii} > 0$, $A_{jj} > 0$, $A_{ii}A_{jj}-A_{ij}^2 > 0$

令 $A_{ii}A_{jj}=A_{ij}^2+e$, e為正數.

則 $(A_{ii}-A_{jj})^2+4e>0$

即 $(A_{ii}+A_{jj})^2-4A_{ii}A_{jj}+4e>0$, 即 $(A_{ii}+A_{jj})^2-4A_{ij}^2>0$, 即 $(A_{ii}+A_{jj})^2>4A_{ij}^2$

兩邊開平方得 $(A_{ii}+A_{jj})>2A_{ij}$, 即 $A_{ii}+A_{jj}-2A_{ij}>0$

[13]. (4%) 【台大94資工】

If

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

What is the solution of

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 7.5 \\ 15.5 \\ 14.0 \\ 4.0 \end{bmatrix}$$

(A) $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型03A.

【解】E.

【討論】設原方程式為$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 並設題目中A的兩個因子為B, C. 即欲解 $BC\mathbf{x}=\mathbf{b}$.
乘出A再求解會比較麻煩. 因B, C已是三角矩陣,
令 $C\mathbf{x}=\mathbf{y}$, 先由 $B\mathbf{y}=\mathbf{b}$ 解出 $\mathbf{y}$, 再由 $C\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 解出 $\mathbf{x}$.

[14]. (4%) 【台大95資工】(複選題)

Given any vectors $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_l$, Define an $l\times l$ matrix A with $A_{ij}=\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j$, $i,j=1,2,...,l$.

Which of the followings is incorrect?

(A) A is symmetric.

(B) A is positive semi-definite (i.;e., A's eigenvalues are ≥ 0)

(C) A is invertible

(D) A's diagonal elements are nonnegative

(E) A is a square matrix.

【分析】本題屬於題型10C. 相關類題請參閱綜線CH10定理26.

【解】C為incorrect.

【討論】將$\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_l$拼成$l\times l$矩陣W, 則 $A=W^TW$.
(C)可取反例如下:
$\mathbf{x}_1=[1, 2]^T$, $\mathbf{x}_2=[3, 6]^T$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 45 \end{bmatrix}$$

[15]. (4%) 【台大94資工】

Define

$$f(\mathbf{x}) = (1/2)[\,x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

and $\nabla f(\mathbf{x}) \equiv [\,\partial f(x_1, ..., x_5)/\partial x_1, ...,\ \partial f(x_1, ..., x_5)/\partial x_5\,]^T$

What is $\nabla f(\,[1, 0, 2, 0, 3]^T\,)$?

(A) $\begin{bmatrix} 22 \\ 25 \\ 33 \\ 39 \\ 45 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 22 \\ 28 \\ 36 \\ 40 \\ 51 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 22 \\ 25 \\ 33 \\ 40 \\ 46 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 22 \\ 28 \\ 34 \\ 40 \\ 46 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 22 \\ 24 \\ 35 \\ 39 \\ 45 \end{bmatrix}$

【分析】本題屬於題型10A.

【解】D.

【補充定理】設A為$n\times n$實數對稱矩陣, 及二次式 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, $\nabla f(\mathbf{x})=2A\mathbf{x}$.

[證] $f(x_1, ... , x_n)=\sum_k a_{kk}x_k^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$ (綜線CH10定理2a)

$\partial f(x_1, ... , x_n)/\partial x_p = 2a_{pp}x_p + 2\sum_{i<p} a_{ip}x_i + 2\sum_{p<j} a_{pj}x_j$

(只會留下$k=p$, $i=p$, $i=j$的項)

$= 2a_{pp}x_p + 2\sum_{i<p} a_{pi}x_i + 2\sum_{p<j} a_{pj}x_j$ (對稱)

$= 2a_{pp}x_p + 2\sum_{j\neq p} a_{pj}x_j$ (後兩項合併)

$= 2\sum_j a_{pj}x_j$ (再合併)

$= 2$ (A的第p列)$\mathbf{x}$

合併 $p=1,2,\ldots,n$, 即得出 $\nabla f(\mathbf{x})=2A\mathbf{x}$.

【討論】由前述補充定理除以2即得.

[16]. (5%) 【離散】

[17]. (5%) 【離散】

[18]. (10%) 【離散】

[19]. (5%) 【離散】

[20]. (10%) 【離散】

[21]. (5%) 【離散】

[22]. (5%) 【離散】

[23]. (5%) 【離散】