線性代數解析--台大96資工所　　廖亦德 解

參考章節使用簡稱，例如綜線CH3代表廖亦德著:「綜合線性代數」第3章,

題型代表廖亦德著:「線性代數題型剖析」書中的題型.

[1]. (10%)　　【台大96資工】

Let matrices

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

and $B=(I+A)^{-1}(I-A)$, calculate the matrix $(I+B)^{-1}$

【分析】本題屬於題型03D. 相關類題請參閱綜線CH3範例12A.

【解】由$B=(I+A)^{-1}(I-A)$ 可得 $(I+A)B=I-A$,

以分隔矩陣 $[\ I+A \mid I-A\ ]$ 做列運算:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&0&0&0&0&0&0&0\\-2&4&0&0&2&-2&0&0\\0&-4&6&0&0&4&-4&0\\0&0&-6&8&0&0&6&-6\end{array}\right]\begin{array}{l}(1)\\ \leftarrow\ (1)\\ \leftarrow\ (1)\\ \leftarrow\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 & 2 & 2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1/2) \\ (1/4) \\ (1/6) \\ (1/8) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right]$$

解得 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{bmatrix}$

再以分隔矩陣 [$I+B$ | I] 做列運算:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1/2)(-1/3)(-1/4) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow\ (4) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

解得 $(I+B)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

【另解】

由$B=(I+A)^{-1}(I-A)$ 可得 $(I+A)B=I-A$，即 $B+AB=I-A$, 移項得 $B+A+AB=I$，

再整理得 $(I+B)+A(I+B)=2I$， 即 $(I+A)(I+B)=2I$，

所以 $(I+B)^{-1}=(1/2)(I+A)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

[2]. (10%) 【台大96資工】

If the rank of the set of vectors $\boldsymbol{b}_1=(0, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_2=(a, 2, 1)$, $\boldsymbol{b}_3=(b, 1, 0)$ is equals to the rank of the set of vectors $\boldsymbol{a}_1=(1, 2, -3)$, $\boldsymbol{a}_2=(3, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_3=(9, 6, -7)$ and $\boldsymbol{b}_3$ can be represented as the linear combination of $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, find the values of a, b.

【分析】本題屬於題型03C. 相關類題請參閱綜線CH3範例9及CH8範例14a.

rank通常是對矩陣定義, 指列空間(及行空間)的維度. (綜線CH8定義13)

對向量集合S, rank的定義是 $\text{rank}S=\dim(\text{span}S)$.

就本題來說, 就是將向量拼成矩陣來求rank.

【解】$\boldsymbol{b}_3$可表為 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$的線性組合,

就是存在 x_1, x_2, x_3, 使 $\boldsymbol{b}_3=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3$

也就是存在 x_1, x_2, x_3, 使 $\boldsymbol{b}_3^T=x_1\boldsymbol{a}_1^T+x_2\boldsymbol{a}_2^T+x_3\boldsymbol{a}_3^T$

也就是存在 3×1矩陣X, 使 $\boldsymbol{b}_3^T=[\ \boldsymbol{a}_1^T\ \ \boldsymbol{a}_2^T\ \ \boldsymbol{a}_3^T\ ]\ X$.

以列運算試解X：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right] (-2)\ (3) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1/6) \\ (1/10) \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & (2b-1)/6 \\ 0 & 1 & 2 & 3b/10 \end{array}\right] (-1) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & (2b-1)/6 \\ 0 & 0 & 0 & (5-b)/30 \end{array}\right] (-1)$$

此方程式有解 $\Longleftrightarrow$ $(5-b)/30=0$ $\Longleftrightarrow$ $b=5$ (綜線CH3定理10)

前述列運算順便也解得 rank$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}=2$. (綜線CH3範例14a)

再以列運算求 rank$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ (-3) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a-15 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此矩陣rank為2 $\Longleftrightarrow$ $a=15$ #

[3]. (10%) 【台大96資工】

Given 3×3 matrix A and four vectors

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

satisfying $A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$, find $A\boldsymbol{d}$.

【分析】本題屬於題型03D. 相關類題請參閱綜線CH3範例12A.

【解】由 $A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$,

可得 $A\,[\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ ] = [\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}\ ]$, (綜線CH2定理6)

兩邊取轉置得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

以列運算求解A^T：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

... (過程略)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 24 & 10 & 25/2 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & -21/2 \\ 0 & 0 & 1 & -31 & -13 & -16 \end{array}\right]$$

解得 $A^T = \begin{bmatrix} 24 & 10 & 25/2 \\ -19 & -7 & -21/2 \\ -31 & -13 & -16 \end{bmatrix}$，即 $A = \begin{bmatrix} 24 & -19 & -31 \\ 10 & -7 & -13 \\ 25/2 & -21/2 & -16 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{Ad} = \begin{bmatrix} 24 & -19 & -31 \\ 10 & -7 & -13 \\ 25/2 & -21/2 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[4]. (20%)　【台大96資工】

(a) If $a_0=2$, $a_1=3$, and $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$, for all n ≥ 1. use generating function method to find the formula for a_n .

(b) Redo part (a) using Eign value mathod.

【分析】本題(b)屬於題型16E. 相關類題請參閱綜線CH16範例13.

【解】(a) 略, 請參閱離散數學相關書籍.

(b)

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_n - 2a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

經對角化程序可得 (過程略) (綜線CH12範例17)

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

於是

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

(由前述公式可推得)

$$= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^n \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

(綜線CH16定理2)

$$= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

(綜線CH2定理4b)

$$= \begin{bmatrix} 2^{n+1}-1 & -2^{n+1}+2 \\ 2^{n}-1 & -2^{n}+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a_n = 3(2^n-1)+2(-2^n+2)$$

$$= 2^n+1$$

[5]. (10%) 【離散】

[6]. (20%) 【離散】

[7]. (20%) 【離散】