99台大資工所線性代數

國立臺灣大學99學年度碩士班招生考試試題

題號:406, 科目: 數學

[1]. (5%) 【台大99資工】

If $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, then (a, b, c)= ______________

【分析】本題屬於題型03A. 相關類題請參閱CH3範例6. 【解】經列運算,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\therefore (a, b, c)=(-5, 3, 2)$

[2]. (5%) 【台大99資工】

If $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, then $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=$ ______________ (5%)

【分析】本題屬於題型02A. 相關類題請參閱CH2定理5a.

【解】經列運算,

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 6 \end{array}\right] \sim \ldots$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3/22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3/11 \end{array}\right]$$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$

$= 1/22+1/11+3/22+2/11+5/22+3/11$

$= (1+2+3+4+5+6)/22=21/22$

【另解】分析係數矩陣:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} + I_6$$

$= [\,1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\,]^T [\,1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,] + I_6$

令 $\boldsymbol{a}=[\,1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,]^T$, $\boldsymbol{b}=[\,1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\,]^T$,

$\boldsymbol{x}=[\,x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T$,

則原式爲 $(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T+I_6)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

兩邊左乘$\boldsymbol{a}^T$得 $(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$

$\therefore (21\boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{x}=21$

$\therefore 22\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=21$

$\therefore \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=21/22$

即 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=21/22$

[3]. (5%) 【台大99資工】

If $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

and $a>1$, then (a, b)=___________

【分析】本題屬於題型02A. 這只是用到矩陣乘法.

【解】等式右邊乘開得

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ ab & a+b & 1 \\ 0 & ab & a+b \end{bmatrix}$$

比較等式左邊得: $ab=1$, $a+b=4$

$b=4-a$,

$a(4-a)=1$,

$a^2-4a+1=0$,

$a=2+3^{1/2}$, 或 $2-3^{1/2}$,

由$a>1$得知$a=2+3^{1/2}$

$b=2-3^{1/2}$

$\therefore (a, b)=(2+3^{1/2}, 2-3^{1/2})$

[4]. (5%) 【台大99資工】

If rank($\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$) = 3, then a= ________

【分析】本題屬於題型08B. 相關類題請參閱CH8範例14a.

【解】經列運算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix}$$

$\therefore\ 2-a=0$, 即 $a=2$.

[5]. (5%) 【台大99資工】

Let $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ and $\{v_1, v_2, v_3\}$ be linearly independent subset of $\mathbb{R}^3$. If $Av_1=3v_1+2v_2+v_3$, $Av_2=v_1+2v_2-v_3$, and $Av_3=v_1+v_2+v_3$, then det(A)= ____________

【分析】本題屬於題型07D.

【解】設$\{v_1, v_2, v_3\}$拼成3×3矩陣P. 則

$Av_1 = P\,[3 \quad 2 \quad 1]^T$, $Av_2 = P\,[1 \quad 2 \quad -1]^T$, and $Av_3=P\,[1 \quad 1 \quad 1]^T$,

(左直切, CH2定理6)

$$\therefore AP = P \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(右直切, CH2定理6)

P的行形成獨立集, 所以就可逆. (CH8定理17)

$\therefore\ \det(A)=\det(PAP^{-1})$ (CH7定理22)

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

[6]. (5%) 【台大99資工】

If $A\in\mathbb{R}^{5\times 7}$ and rank(A)=4, then rank(A^TA)–rank(A^T)rank(A)= _________

【分析】本題屬於題型08C.

【解】rank(A^TA)=rank(A)=4, (CH9定理20)

rank(A^T)=rank(A)=4, (CH8定理15)

所求為 4–4×4 = –12

[7]. (5%) 【台大99資工】

Let $u=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $A=I_3+5uu^T$, then $u^TA^{-1}u=$ ______________

【分析】本題屬於題型03D. 相關類題請參閱CH2範例17.

【解】 $A-I_3=5uu^T$,

$(A-I_3)^2=(5uu^T)(5uu^T)$

$=25uu^Tuu^T=25u(u^Tu)u^T=25u[3]u^T$

$=75uu^T=15(A-I_3)$

$\therefore A^2-2A+I_3=15A-15I_3$

$\therefore A^2-17A=-16I_3$.

$\therefore A((-1/16)(A-17I_3))=I_3$ 且 $((-1/16)(A-17I_3))A=I_3$

$\therefore A^{-1}=(-1/16)(A-17I_3)=(-1/16)(5uu^T-16I_3)$

$u^TA^{-1}u=(-1/16)u^T(5uu^T-16I_3)u$

$=(-1/16)(5u^Tuu^Tu-16u^Tu)$

$=(-1/16)(5u^Tuu^Tu-16u^Tu)$

$=(-1/16)(5\times3\times3-16\times3)=3/16$

【另解】也可算出A, 用列運算求出A^{-1}, 再算$u^TA^{-1}u$. (此法稍慢)

[8]. (5%) 【台大99資工】

Let $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, then there exist $a, b \in \mathbb{R}$ such that $(I_2-A)^{-1}=aA+bI_2$,

where (a, b)=________

【分析】本題屬於題型03D. 相關類題請參閱CH2範例17.

【解】令 $B=I_2-A$, 則

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$\det(B-xI_2)=x^2+4x+6$

$\therefore B^2+4B+6I_2=O$. (Cayley-Hamilton定理)

$\therefore B^2+4B=-6I_2$

$\therefore B((-1/6)(B+4I_2))=I_2$ 且 $((-1/6)(B+4I_2))B=I_2$

$\therefore B^{-1}=(-1/6)(B+4I_2)=(-1/6)(I_2-A+4I_2)=(-1/6)(-A+5I_2)$

$=((1/6)A+(-5/6)I_2)$

$\therefore (a, b)=(1/6, -5/6)$.

[9]. (5%) 【台大99資工】

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}$, then det($A$–$I_5$)= ____________

【分析】本題屬於題型04B. 相關類題請參閱CH4範例12.

【解】 det(A–I_5)=

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 12 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 18 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 24 \end{vmatrix}$$

(各列減去第1列)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 10 & 10 \\ 16 & 15 & 15 & 14 & 15 \\ 21 & 20 & 20 & 20 & 19 \end{vmatrix}$$

(各行減去第5行)

$$= \begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 19 \end{vmatrix}$$

(第1行加入第2行，第一行的(–5)倍加入第5行)

$$= \begin{vmatrix} -5 & -8 & -2 & -1 & 30 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

(第2列降階)

$$= -\begin{vmatrix} -8 & -2 & -1 & 30 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

(第1行加入第2行，第一行的(–5)倍加入第4行)

$$= -\begin{vmatrix} -8 & -10 & -1 & 70 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

(第2列降階)

$$= \begin{vmatrix} -10 & -1 & 70 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

(第3列加入各列)

$$= \begin{vmatrix} -6 & 0 & 64 \\ 5 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

(第2行降階)

$$= -\begin{vmatrix} -6 & 64 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -(6 - \quad 320) = 314$

[10]. (5%)　　【台大99資工】

Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then the largest eigenvalue of A is ______

【分析】本題屬於題型04B. 相關類題請參閱CH4範例13.

【解】

設k階行列式 $D_k = \begin{vmatrix} t & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & t & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & t & 2 & \ldots & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & t \end{vmatrix}$

對第一行展開，則

$D_k = tD_{k-1} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & t & 2 & \ldots & 0 \\ & \ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & t \end{vmatrix}$

$= tD_{k-1} - 4D_{k-2}$

$D_1 = t$,

$D_2 = \begin{vmatrix} t & 2 \\ 2 & t \end{vmatrix} = t^2 - 4$

$D_3 = tD_2 - 4D_1 = t(t^2 - 4) - 4t = t^3 - 8t$

$D_4 = tD_3 - 4D_2 = t(t^3 - 8t) - 4(t^2 - 4) = t^4 - 12t^2 + 16$

$D_5 = tD_4 - 4D_3 = t(t^4 - 12t^2 + 16) - 4(t^3 - 8t) = t^5 - 16t^3 + 48t$

$= t(t^4 - 16t^2 + 48)$

$= t(t^2 - 12)(t^2 - 4)$

$= t(t - 12^{1/2})(t + 12^{1/2})(t - 2)(t + 2)$

以 $t=3-x$ 代入得

$\det(A - xI_5) = (3-x)((3-x)-12^{1/2})((3-x)+12^{1/2})((3-x)-2)((3-x)+2)$

$= (3-x)(3-12^{1/2}-x)(3+12^{1/2}-x)(1-x)(5-x)$

∴ A的特徵值為 3, $3-12^{1/2}$, $3+12^{1/2}$, 1, 5

A的最大特徵值為 $3+12^{1/2}$,.

[11]. (10%) 離散數學

[12]. (20%) 離散數學

[13]. (10%) 離散數學

[14]. (10%) 離散數學

[15]. (10%) 離散數學