數 學 基 礎

—— 前言 ——

集合與函數是數學的基礎工具，對證明題的學習尤其重要．但一般人只學到一些零碎的片段，而且對各個名詞僅止於概念上的了解，不能嚴格寫出完整的定義．這個專題對集合與函數作一個完整的複習，各位同學務必親自動手練習到能自己寫得出每個定義以及同一件事實的各種變形，才足以應付證明題的需要．

§1．集合

【要點１】集合的基本概念

集合(*set*)，元素(*element*)，屬於(*belong*,記爲$\in$) 都是無定義名詞． 元素常稱爲點(*point*)，而集合常稱爲空間(*space*)．元素與集合之間的關係是屬於(*belong*,記爲$\in$)，或不屬於(記爲$\notin$)．集合之間可有包含於(*be contained in, be included in*，記爲$\subseteq$)，相等(*equal*)的關係.

不含任何元素的集合{ }稱爲空集合(*empty set, null set*)，記爲ϕ.

在某個討論範圍內包含一切元素的集合稱爲宇集合(*universal set*)，常記爲U. 不同的討論範圍有不同的宇集合.

集合的描述法:

① 窮舉法：將所有元素列出. 例如

$\{ -3, 7, 9, 24 \}$, $\{ 0, 2, 4, 6, 8, ... \}$.

在此種描述法之下,

$x\in A \Longleftrightarrow x$是列出元素之一

元素的排列順序不影響集合.

② **典型元素描述法**：描述所屬元素的特徵性質, 標準格式如下

$$A=\{\, x \mid p(x) \,\},\quad B=\{\, x\in U \mid p(x) \,\},$$

其中 $p(x)$ 是有關x的一個敘述.

在此種描述法之下,

$x\in A \Longleftrightarrow p(x)$成立

$x\in B \Longleftrightarrow x\in U$且$p(x)$成立

此種描述法的分隔線也常寫成冒號 ":" .

[說明] (1) 集合用大括號 "{" 和 "}" 括起來, 不要寫成中括號.

(2) 不要把數學式中的逗點 "," 寫成句點 "." .

(3) 同一個集合常有各種不同的表示法(見下列實例).

[例1.1]

設 $A=\{\, x \mid x(x+1)=0 \,\}$, 則

$x\in A \Longleftrightarrow x(x+1)=0 \Longleftrightarrow x=0, -1$

即 $A=\{\, 0, -1 \,\}$

設$B=\{\, (x,y) \mid x+y=1, 2x+2y=0 \,\}$. 解聯立方程式可知$B=\phi$

[例1.2]

$\{\, x \mid x\in \mathbb{Z}, x\geq 0 \,\}$ 常簡寫爲 $\{\, x\in \mathbb{Z} \mid x\geq 0 \,\}$

[例1.3]

考慮 $A=\{\, x \mid \exists\, k\in \mathbb{Z}, x=2k \,\}$,

$x\in A \Longleftrightarrow x$是某個整數$k$的兩倍 $\Longleftrightarrow x$是偶數.

所以 $A=\{\, \ldots\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots \,\}$.

A也稍不嚴謹地寫成 $\{\, x \mid x=2k$, 其中 $k\in \mathbb{Z}\}$. (英文將“其中”寫爲“where”).

設 $B=\{\, x \mid \forall\, k\in \mathbb{Z}\ , x=2k \,\}$, 則

$x \in B \Longleftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{Z}\ , x = 2k \Longleftrightarrow x$是每個整數$k$的兩倍

這個條件無法成立, 所以$B = \phi$.

A可簡寫爲$\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 在此, 分隔線右方是再解釋左方(已出現的那個)k的變動範圍.

A不能寫成 $\{ x \mid k \in \mathbb{Z}, x = 2k \}$, 因爲這樣沒解釋k的屬性是什麼.

A也不能寫成 $\{2k \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}\}$. 寫在∃之後的k是一個新宣告的符號, 它和前面的k互不相干. 這就使分隔線左方的k未解釋. 而且使右方的敘述變成一句沒說完的話.

[例1.4]

$\{ z \mid z = (x, y)$, 其中$x, y \in \mathbb{R}$且$x + y = 1 \}$ (稍不嚴謹)

$= \{ z \mid \exists x, y \in \mathbb{R}$, 使$z = (x, y)$且$x + y = 1 \}$ (上式的正式寫法)

$= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1 \}$ (此式不寫∃)

$= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = 1 - x \}$ (此式不寫∃)

$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x \}$ (此式不寫∃)

$= \{ (x, y) \mid \exists t \in \mathbb{R}$, 使得 $x = t, y = 1 - t \}$

$= \{ (t, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (此式不寫∃)

【要點２】常用數系

正整數(*positive integer*)系: $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,4,......\}$

自然數(*natural number*)系: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,....\}$

整數(*integer*)系: $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,......\}$

有理數(*rational number*)系: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

實數(*real number*)系: $\mathbb{R} = \{x \mid x$是實數$\}$,

複數(*complex number*)系: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}\, y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, 其中i爲虛數單位, 是–1的平方根.

模p整數(*integer modulo p*)系: $\mathbb{Z}_p = \{ 0, 1, ..., p - 1 \}$, p是質數.

[說明] (1) 傳統上不把 0 當作自然數, 但隨著電腦科學的發展, 承認 0 是自然數的書漸漸增多. 讀任一本提到自然數書都應先查明它所用的定義.

(2) 實數的概念從測量長度而產生，它的嚴格定義較複雜，屬於數學系專門課程的範圍. 概念上可將實數看成一條直線(稱爲數線)上的點.
電腦領域常將代表科學記法，含有誤差的浮點數(floating point number)，如6.02×10^{23}，稱爲實數，但這並不是數學上的實數.

(3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$內的數叫做**無理數**(irrational number).
$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$內的數叫做**虛數**(imaginary number).
$i\mathbb{R}=\{y\mathrm{i}\mid y\in\mathbb{R}\}$ 內的數稱爲**純虛數**(pure imaginary number)

(4) 從抽象代數看，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{Z}_p$ 是field，$\mathbb{Z}$是integral domain，$\mathbb{N}$是monoid，$\mathbb{Z}^+$是semi-group.

【要點３】複數的運算性質

① $i^2=-1$

② 對複數$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in\mathbb{R})$，四則運算定義如下:

$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$　(免背，用交換律,結合律,分配律即可計算)

$z_1/z_2=((x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2-x_1y_2))/(x_2^2+y_2^2)$　(免背，見說明1)

複數加法和乘法都滿足交換律，結合律. 乘對加有分配律.

③ 複數的**乘冪**(power):
對任意複數z，及正整數n，定義 z^n爲z自乘n次.
若非零複數z，及正整數n，定義 $z^0=1$, $z^{-n}=1/z^n$

④ 對複數$z=x+iy$, $(x, y\in\mathbb{R})$,
x稱爲z的**實部**，記爲$x=\mathrm{Re}\, z$，　y稱爲z的**虛部**，記爲 $y=\mathrm{Im}\, z$.
$x-iy$稱爲z的**共軛複數**，記爲 $\bar{z}$.
z的**絕對值**　$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

⑤ $z=x+iy$常寫成極坐標型 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,　$r>0$.
r就是z的**絕對值**，θ稱爲z的**幅角**(*argument*).
由 r, θ轉換成 x, y 的關係式爲

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

由 x, y 轉換成 r, θ的關係式為

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}(y/x) + n\pi \quad , \quad n\text{須由}x, y\text{的正負判定.}$$

重要性質: $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta$

⑥ 對$z, w \in \mathbb{C}$, 有下列基本性質:

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$$

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z \quad , \quad z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}\,z$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z \iff z^2 = |z|^2$$

$$z \in i\mathbb{R}\ (\text{純虛數}) \iff z = -\bar{z}$$

$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(-iz)$

$|zw| = |z|\,|w|$, $|z/w| = |z|/|w|$

$|z+w| \leq |z| + |w|$

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}, \quad \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, \quad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$$

對複係數多項式$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, 及複數$z$,

$$\overline{f(z)} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n\bar{z}^n.$$

若$f(t)$是實係數多項式, 則 $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$

[說明] (1) 複數做數字計算時不必背②的公式, 只須利用①,交換律,結合律及

$$z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$$

即可. .

(2) 複數之間不能正常地討論大小, 因此只有實數可比大小.

當題到“ 複數 $z > 0$ ”時, 就已經暗示z是正實數.

(3) 整個複數系在代數結構上形成一個體(field). (綜線CH5定義1)

[例3.1]

對 $a=3-2i$, $b=6+5i$, 計算a, b的和,差,積,商, 絕對值.

[解] $a+b=(3+(-2)i)+(6+5i)=(3+6)+(-2+5)i=9+3i$

$a-b=(3+(-2)i)-(6+5i)=(3-6)+(-2-5)i=-3-7i$

$ab=(3-2i)(6+5i)=18+15i-12i-10i^2=18+3i+10=28+3i$

$|\,b\,|=|\,6+5i\,|=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$

$a\overline{b}=(3-2i)(6-5i)=18-15i-12i+10i^2=8-27i$

$a/b=a\,\overline{b}/|b|^2=(8-27i)/61=8/61-(27/61)i$

[習題3.1] 驗證⑥的各個公式. (這些公式應該要能自行推導)

【要點3a】複數的運算性質

① 複數加減法就幾何上來說與平面向量完全相同.

由三角學的和角公式可導出:

$(p(\cos A+i\sin A))(q(\cos B+i\sin B))=(pq)(\cos(A+B)+i\sin(A+B))$

$(p(\cos A+i\sin A))/(q(\cos B+i\sin B))=(p/q)(\cos(A-B)+i\sin(A-B))$

上二式的幾何意義如下:

複數相乘時, 絕對值相乘, 幅角相加.

複數相除時, 絕對值相除, 幅角相減.

② DeMoivre 定理

$(r(\cos\theta+i\sin\theta))^{\mathrm{n}}=r^{\mathrm{n}}\,(\cos(n\theta)+i\,\sin(n\theta))$,

上式的幾何意義如下:

複數求n次方時, 絕對值變n次方, 幅角變n倍. ① 複指數(exponential)

對實數t, 定義 $e^{\mathrm{i}t}=\cos t+i\sin t$,

對實數a,b, 定義 $e^{a+bi}=e^{a}\,(\cos b+i\sin b)$.

對實數a,b,正實數r, 定義 $r^{a+bi}=e^{(a+ib)\ln r}=e^{a\ln r}(\cos(b\ln r)+i\sin(b\ln r))$

③ 複數方程式 $z^{\mathrm{n}}=1$ 的解爲 $1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{\mathrm{n}-1}$,

其中$\omega=e^{\mathrm{i}(2\pi/n)}=\cos(2\pi/n)+\mathrm{i}\sin(2\pi/n)$.

當n=4時, ω=i.

當n=3時, $\omega=(-1+\sqrt{3})/2$, $\omega^2=\omega^{-1}=\bar{\omega}=(-1-\sqrt{3})/2$. 且 $1+\omega+\omega^2=0$

④ 指數型: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 常寫成 $z=re^{i\theta}$.

由此型, 乘除法的公式變爲 $(pe^{iq})(re^{is})=pre^{i(q+s)}$, $(pe^{iq})/(re^{is})=(p/r)e^{i(q-s)}$

DeMoivre定理變爲 $(re^{i\theta})^n=r^n e^{in\theta}$

⑤ 實變數複數函數的微分與積分

設f : $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$, $f(t)=p(t)+iq(t)$, 則定義

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{dp(t)}{dt}+i\frac{dp(t)}{dt},$$

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b p(t)dt+i\int_a^b q(t)dt.$$

[說明] (1) 乘$e^{i\theta}$ 就是正轉(逆時針)θ角. 乘$e^{-i\theta}$ 就是逆轉(順時針)θ角.

(2) $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

(3) 非正數也可以定義複指數. 但這要牽涉到複數的對數, 在此省略不談.

*[例3a.1]

由複數乘法的幾何意義可知:

函數 $f(z)=e^{i\theta}z$ 將複平面旋轉θ角. (rotation)

設$\theta=2H$, 考慮傾斜角爲H的直線 $l=\{ re^{iH} \mid r\in\mathbb{R} \}$.

函數 $g(z)=e^{i\theta}\bar{z}$ 將複平面沿l翻轉(reflection).

函數 $h(z)=e^{iH}\,\mathrm{Re}(e^{-iH}z)$ 爲對l的正投影(projection).

[例3a.2]

$$(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{10}$$

$$= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$$

$$= 2^{10/2}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) \qquad \text{(DeMoivre定理)}$$

$$= 2^{5}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = 2^{5}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 32\,i$$

另解:

$(1+i)^{10}=((1+i)^2)^5=(1+2i+i^2)^5=(2i)^5=2^5i^5=32i.$

【要點４】　**模p整數的運算性質**

① $\mathbb{Z}_p$ 內的運算(加,乘)是先照整數計算, 算完後再取除以p的餘數.

以$p=5$爲例, 它的加法和乘法可列表如下:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_p$ 內的加法和乘法常記爲 $+_p$ 和 $\cdot_p$.

② $\mathbb{Z}_p$ 仍以 0 爲加法單位元素, 以 1 爲乘法單位元素,

③ $\mathbb{Z}_p$ 對加法和乘法都滿足交換律, 結合律. 乘對加有分配律.

④ $\mathbb{Z}_p$ 中每個數都有加法反元素, 每個不爲零的數都有乘法反元素.

以$p=5$爲例, 加法反元素和乘法反元素如下:

$-0=0$, $-1=4$, $-2=3$, $-3=2$, $-4=1$

$1^{-1}=1$, $2^{-1}=3$, $3^{-1}=2$, $4^{-1}=4$

[說明] (1) 加法反元素就是和它相加會變成0的數. 乘法反元素就是和它相乘會變成1的數. 零沒有乘法反元素.

例如當$p=3$時, 因爲$2+1=0$, 所以 $-2=1, -1=2$.

又因爲 $2 \bullet 2=1$, 所以 $2^{-1}=2$.

[例4.1] 考慮$f(x)=x^3-2x+1$.

在$\mathbb{Z}_5$ 之中, $f(2)=2\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot 2+1$

$= 4\cdot 2 + 3\cdot 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 0$

在$\mathbb{Z}_3$ 之中, $f(2)=2\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot 2+1$

$= 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2$

[例4.2] 考慮$g(x, y)=x-y^{-1}$

在$\mathbb{Z}_5$之中, $g(2,2)=2-2^{-1}=2-3=2+2=4$

在$\mathbb{Z}_3$之中, $g(2,2)=2-2^{-1}=2-2=2+1=0$

[例4.3] 在$\mathbb{Z}_5$中解聯立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=4 \\ 4x-y\ \ +3z=1 \end{cases}$$

[解] (參閱綜合線性代數CH3範例7)

對分隔矩陣做列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{(1)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

原方程式化爲 $\begin{cases} x \quad\quad + 3z = 1 \\ \quad\quad y + 4z = 3 \end{cases}$

解得

$$\begin{cases} x = 1-3t = 1+2t \\ y = 3-4t = 3+t \quad , \quad t \in \mathbb{Z}_5 \\ z = t \end{cases}$$

以$t=0, 1, 2, 3, 4$ 代入, 共得出五組解:

(1,3,0), (3,4,1), (0,0,2), (2,1,3), (4,2,4).　　　　#

【要點５】　集合的基本運算

◎ 交集(*intersection*)

定義　$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

用法　$x\in A\cap B \Longleftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$

◎ 聯集(*union*)

定義　$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

用法　$x\in A\cup B \Longleftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$

◎ 差集 (*difference*)

定義　$A\setminus B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$

用法　$x\in A\setminus B \Longleftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin B$

◎ 補集 (*complement*)

定義　$A^c=\{x \mid x\notin A\}$,　嚴格說應該定義成

$A^c=U\setminus A=\{x \mid x\in U, x\notin A\}$.　(U是宇集).

用法 $x \in A^c \Longleftrightarrow x \notin A$

A^c 的符號分岐較大，有的書寫成 ${}^cA$, c(A) , A' , $\overline{A}$.

＊◎ 對稱差(*symmetric difference*)，又稱環和(*ring sum*)

定義 $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

用法 $x \in A \triangle B \Longleftrightarrow$ “$x \in A$或$x \in B$，但不可都成立”

$\Longleftrightarrow$ “$x \in A$且$x \notin B$”或“$x \in B$且$x \notin A$”

[說明] (1) $A \cap B = \phi$時稱A,B不相交(disjoint).

(2) $A \setminus B = A \cap B^c$

(3) $(A^c)^c = A$

[例5.1] 設 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$，宇集$U = \{1,2,3,4,5,6\}$

則 $A \cap B = B \cap A = \{3\}$, $A \cup B = B \cup A = \{1,2,3,4\}$,

$A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{4\}$, $A \Delta B = \{1,2,4\}$,

$A^c = \{4,5,6\}$, $B^c = \{1,2,5,6\}$,

[例5.2]

$$\{ (a,-a,c) \mid a,c \in \mathbb{R} \} \cap \{ (p,q,2p) \mid p,q \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (x, y, z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}, x+y=0 \} \cap \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, z=2x \}$$
$$= \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x+y=0, z=2x \}$$
$$= \{ (a,-a,2a) \mid a \in \mathbb{R} \}$$

【要點5a】 集合的基本運算

◎ 積集，又稱笛卡兒積(*cartetian product*)

定義 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

用法 $v \in A \times B \Longleftrightarrow \exists\, x \in A, y \in B$，使 $v = (x, y)$

定義 $A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$

用法　$v\in A\times B\times C \Longleftrightarrow \exists\, x\in A, y\in B, z\in C$使$v=(x, y, z)$

更多項時依此類推.

◎ 乘冪(*power*)

定義　$A^n=\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n\in A\}$

用法　$v\in A^n \Longleftrightarrow \exists x_1, x_2, ..., x_n\in A$, 使 $v=(x_1, x_2, ..., x_n)$

◎ 冪集合(*power set*)

定義　$2^A=\mathscr{P}(A)=\{S \mid S\subseteq A\}$

用法　$X\in\mathscr{P}(A) \Longleftrightarrow X\subseteq A$

◎ 函數空間(*function space*)

定義　$B^A=\mathrm{Map}(A,B)=\{f \mid f: A\longrightarrow B\}$

用法　$f\in\mathrm{Map}(A,B) \Longleftrightarrow f: A\longrightarrow B$

◎ 其他運算

若宇集合上具有某個運算*, 則有

定義　$A*B=\{a*b \mid a\in A, b\in B\}$

用法　$x\in A*B \Longleftrightarrow \exists a\in A, b\in B$, 使 $x=a*b$

(線性代數中依此法由向量加法定義子空間的和空間)

[說明] (1) 若A,B是有限集, 則

$$\#(A^n)=(\#A)^n,\quad \#(2^A)=2^{\#A},\quad \#(B^A)=(\#B)^{\#A}$$

[例5a.1]　設 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4\}$,

$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$,

$B\times A=\{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}\neq B\times A$.

$\mathscr{P}(A)=\{\ \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\ \}$

$A+B=\{1+3, 1+4, 2+3, 2+4, 3+3, 3+4\}=\{4, 5, 6, 7\}$

[例5a.2]　$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x, y) \mid x, y\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x, y, z) \mid x, y, z\in\mathbb{R}\}$

【要點６】集合的包含

下列各敘述等價:

(ⅰ) $A\subseteq B$ (A包含於B; A is included in B; A is contained in B; A is a subset of B)
(subset譯爲子集或部份集合)

(ⅱ) $B\supseteq A$ (B包含A; B includes A; B contains A; B is a superset of A)
(superset這名詞較少見, 應避免使用)

(ⅲ) $B^c\subseteq A^c$

(ⅳ) $x\in A \Longrightarrow x\in B$
(每個A的元素都在B內. 也可寫成$\forall x\in A$, $x\in B$)

(ⅴ) $x\notin B \Longrightarrow x\notin A$

(ⅵ) $A\diagdown B=\phi$

(ⅶ) $A\cap B=A$

(ⅷ) $A\cup B=B$

[說明] (1) 若以元素觀點證明$A\subseteq B$, 通常使用ⅳ式. 有時候採用矛盾證法, 也就是ⅴ式. 由基本邏輯可知還有一些別的說法, 讀者可自行變化運用.

(2) $A\subseteq B$且$A\neq B$時, 稱A嚴格(*strictly*)包含於B, 或說A是B的真子集(*proper subset*).

(3) 有些書用$\subset$表示嚴格包含, 用$\subseteq$表示普通包含. 也有些書用$\subset$表示普通包含.

(4) 下列各敘述是同一回事:

(ⅰ) $A\not\subseteq B$ (ⅱ) $B\not\supseteq A$

(ⅲ) $\exists x\in A$, 使$x\notin B$ (ⅳ) $A\diagdown B\neq\phi$

[例6.1] 設$A=\{x\in\mathbb{C}\mid x^2=1\}$, $B=\{x\in\mathbb{C}\mid x^4=1\}$.

$\because$ $x^2=1 \Longrightarrow x^4=1$

$\therefore$ $A\subseteq B$.

$\because$ $i^4=1$, $i^2\neq 1$

$\therefore$ $i\in B$, $i\notin A$.

$\therefore$ $B\not\subseteq A$

[例6.2] 對矩陣A,B, 證明 $\{x \mid ABx=o\}\supseteq\{x \mid Bx=o\}$　　(參閱綜線CH5定義19)

[證] 若 $x\in\{x \mid Bx=o\}$,

則 $Bx=o$,

$\therefore$ $ABx=o$,

$\therefore$ $x\in\{x \mid ABx=o\}$

【要點７】包含的基本性質

設U為宇集合, 集合A,B,$C\subseteq U$, 元素x, $y\in U$. 則:

① $A\subseteq A$, $\phi\subseteq A$, $A\subseteq U$

② $A\subseteq\phi \iff A=\phi$

③ $x\in\{y\} \iff x=y$

④ $A\subseteq B$且$B\subseteq C \implies A\subseteq C$　　(transitive law)

⑤ $A\subseteq C$且$B\subseteq C \iff A\cup B\subseteq C$

⑥ $A\subseteq B$且$A\subseteq C \iff A\subseteq B\cap C$

[說明] (1) $\neg(A=\phi) \iff A\neq\phi \iff \exists x$使得$x\in A$

證明$A=\phi$的方法是先假設存在$x\in A$, 再導出矛盾.

(2) ①--④算是“常識”.

(3) ⑤⑥對證明較有用, 見例7.2及綜合線性代數CH6習題2.5, CH11定理18③.

[例7.1] 證明③ $A\subseteq C$且$B\subseteq C \iff A\cup B\subseteq C$

[證] [$\implies$] 已知 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq C$, 現欲證 $A\cup B\subseteq C$:

若 $x\in A\cup B$, 則 $x\in A$ 或 $x\in B$

在$x\in A$的情況由$A\subseteq C$得知$x\in C$

在$x\in B$的情況由$B\subseteq C$也得知$x\in C$

$\therefore\ x\in C$

[$\Longleftarrow$] 已知 $A\cup B\subseteq C$， 證明$A\subseteq C$如下:

若 $x\in A$, 則 $x\in A\cup B$, 再由已知則得 $x\in C$.

同理可證$B\subseteq C$.

[例7.2] 利用⑤式證明 $(A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$

[證] $\because\ A\cup B\supseteq A$

$\therefore\ (A\cup B)^c\subseteq A^c$ (要點6)

同理可得

$(A\cup B)^c\subseteq B^c$

$\therefore\ (A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$

[習題7.1] 對任意集合A,B, 證明 $A\cap(B\setminus A)=\phi$

[習題7.2] 證明⑥: $A\subseteq B$且$A\subseteq C\iff A\subseteq B\cap C$

[習題7.3] 證明 $\{\, x \mid xAB=o\ )\supseteq\{\, x \mid xA=o\ \}$

【要點８】集合的相等

下列各敘述等價:

(ⅰ) $A=B$

(ⅱ) $B=A$

(ⅲ) $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$

(ⅳ) $x\in A \iff x\in B$

(ⅴ) $(x\in A\Longrightarrow x\in B)$ 且 $(x\in A\Longleftarrow x\in B)$

(ⅵ) $A\setminus B=\phi$ 且 $B\setminus A=\phi$

＊(vii) $A\triangle B=\phi$ (Logic Design 常用此式)

[例8.1] 設P為可逆矩陣, 證明

$$\{ x \mid PAx=o \} = \{x \mid Ax=o \}$$　　(參閱綜合線性代數CH5定義19)

[解] [$\supseteq$] 若 $x\in\{x \mid Ax=o \}$,

則 $Ax=o$,

$\therefore$ $PAx=o$

$\therefore$ $x\in\{ x \mid PAx=o \}$

[$\subseteq$] 若 $x\in\{ x \mid PAx=o \}$,

則 $PAx=o$,

$\therefore$ $Ax=P^{-1}o=o$

$\therefore$ $x\in\{ x \mid Ax=o \}$

[習題8.1] 依否定法寫出$A\neq B$的各種等價敘述.

【要點９】集合的運算性質

① $A\cap\phi=\phi, A\cap U=A,\quad A\cup\phi=A, A\cup U=U.$

② $A\cap A=A=A\cup A$

③ $A\cap B=B\cap A,\quad A\cup B=B\cup A$　(commutative law)

④ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　(distribution law)

⑤ $A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B,\quad A\subseteq A\cup B,\quad B\subseteq A\cup B$

⑥ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

⑦ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$,　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$　(DeMorgan's laws)

⑧ $(A\cap B)\cup B=B,\quad (A\cup B)\cap B=B$　(absorption laws)

＊⑨ $A\Delta B=B\Delta A$,　$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$,

$A\Delta A=\phi, A\Delta\phi=A,\quad A\Delta U=A^c$,

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

⑩ $(A \triangle B) \triangle B = A$.

[說明] (1) 通常 $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

(2) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

[習題9.1] 畫圖(Venn diagram)檢驗④⑤⑥⑦⑧⑨

＊【要點１０】集合的推廣運算

設 $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ 是以I為指標集(index set)的集合族(family of set),

定義

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

當$I=\{1,2,\ldots,k\}$時, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

當$I=\mathbb{Z}^+=\{1,2,\ldots\}$時, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots$$

用法如下:

$$x \in \bigcap \mathcal{F} \iff \forall S \in \mathcal{F}, x \in S$$

$$x \in \bigcup \mathcal{F} \iff \exists S \in \mathcal{F}, x \in S$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longleftrightarrow \exists\, i \in I, x \in A_i$

(非數學系通常只考慮有限多個集合的聯集與交集.)

[說明] (1) $x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$

$\Longleftrightarrow$ $x \in A_1$ 且 $x \in A_2$ 且 $x \in A_3$ 且 .... 且 $x \in A_k$

($\Longleftrightarrow$ x屬於每個A_i)

$\Longleftrightarrow$ $\forall i = 1,2,\ldots,k, x \in A_i$

(2) $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$

$\Longleftrightarrow$ $x \in A_1$ 或 $x \in A_2$ 或 $x \in A_3$ 或 .... 或 $x \in A_k$

($\Longleftrightarrow$ x屬於某個A_i)

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, i = 1,2,\ldots,k, x \in A_i$

(3) 人類並不能執行無限多次的運算. 因此無限級數並不是“無限多項的加法”， 數學上是將無限級數定義成“部份和的極限”:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \ldots\ldots = \lim_{k \to \infty} (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$

極限值可能存在或不存在, 所以無限級數有收斂發散的問題.

另一方面, 無限集合族的聯(交)集也不是“無限多項的聯(交)集”. 但它並不是定義成“部份聯(交)集”的極限. 事實上我們也欠缺測量“兩個集合接近程度”的方法.

無限集合族的聯(交)集是用“there exist (for all)”直接下定義. 這個聯(交)集必定存在, 沒有收斂發散的問題

(4) 無限聯集,無限交集不能用極限計算. 而且在邊界點要特別小心!

[例10.1]

$$\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i = \bigcap_{i=1}^{3} A_i = \bigcap \{ A_1, A_2, A_3 \}$$

[例10.2]

對正整數n，令$B_n=\{x \mid (1/n)\le x<100+(1/n)\}$.

① $\bigcap\{B_n \mid n=1,2,\ldots,k\}=\{x \mid \forall n=1,2,\ldots,k,\ x\in B_n\}$

$=\{x \mid \forall n=1,2,\ldots,k,\quad (1/n)\le x<100+(1/n)\}$

$=\{x \mid 1\le x<100+1/k\}$

② $\bigcup\{B_n \mid n=1,2,\ldots,k\}=\{x \mid \exists n=1,2,\ldots,k,\quad x\in B_n\}$

$=\{x \mid \exists n=1,2,\ldots,k,\quad (1/n)\le x<100+(1/n)\}$

$=\{x \mid 1/k\le x<101\}$

③ $\bigcap\{B_n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}=\{x \mid \forall n\in\mathbb{Z}^+,\ x\in B_n\}$

$=\{x \mid \forall n\in\mathbb{Z}^+,\ (1/n)\le x<100+(1/n)\}$

(分別對 $x<1$, $x=1$, $1<x<100$, $x=100$, $x>100$檢驗是否合條件)

$=\{x \mid 1\le x\le 100\}$ (注意:100合條件!)

④ $\bigcup\{B_n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}=\{x \mid \exists n\in\mathbb{Z}^+,\ x\in B_n\}$

$=\{x \mid \exists n\in\mathbb{Z}^+,\ (1/n)\le x<100+(1/n)\}$

(分別對 $x<0$, $x=0$, $0<x<101$, $x=101$, $x>101$檢驗是否合條件)

$=\{x \mid 0<x<101\}$ (注意:0不合條件!)

[例10.3]

設$A_t=\{x \mid t<x<t+2\}$ 則

$\bigcap\{A_t \mid t\in\mathbb{R}\}=\{x \mid \forall t\in\mathbb{R},\ x\in A_t\}=\{x \mid \forall t\in\mathbb{R},\ t<x<t+2\}=\phi$,

$\bigcup\{A_t \mid t\in\mathbb{R}\}=\{x \mid \exists t\in\mathbb{R},\ x\in A_t\}=\{x \mid \exists t\in\mathbb{R},\ t<x<t+2\}=\mathbb{R}$

【要點１１】

$A\cup(\bigcap_{i\in I} B_i)=\bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$, $A\cap(\bigcup_{i\in I} B_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$ 《distribution law》

$(\bigcap_{i\in I} B_i)^C=\bigcup_{i\in I}(B_i^C)$, $(\bigcup_{i\in I} B_i)^C=\bigcap_{i\in I}(B_i^C)$ 《DeMorgan's laws》

§2．函數

【要點１２】**定義域,對應域,像集合**

若對每個$x\in A$都恰有(存在且唯一的)一個$f(x)\in B$與x對應, 則這對應關係f稱爲由A映到(into)B的**函數**, 記爲 $f: A\longrightarrow B$． A稱爲**定義域**(*domain of definition*, 或*domain*), 是自變數x的變動範圍. B稱爲**對應域**(*codomain*), 是函數值$f(x)$的允許範圍.

有少數書把$f(x)$ 寫成 xf.

函數值 $f(x)$實際涵蓋到的範圍稱爲f的**像集合**(*image*), 記爲$\mathrm{Im}f$, 即

$$\mathrm{Im}f=\{\,y\mid \exists x\in A,\ y=f(x)\,\}\ =\ \{\,f(x)\mid x\in A\,\}.$$

顯然 $\mathrm{Im}f\subseteq B$.

[說明] (1) 値域(range)這個名詞有些爭議. 本來在純數學的領域, range是指前述的像集合. 但後來在應用數學的領域上, 卻有許多書用 range 表示前述的對應域. 爲避免混淆, 最好是不使用 range 這個名詞. 不過在遇到這個詞的時候, 通常都可由上下文看出它是哪一種意思.

(2) 設$K=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $f: K^{n}\longrightarrow K^{m}$,

在$n=1$時稱f爲單變數函數; 在$n>1$時稱f爲多變數函數.

在$m=1$時稱f爲純量值函數; 在$m>1$時稱f爲向量值函數.

(3) 對函數$f: A\times B\longrightarrow C$及定義域$A\times B$的元素$(x, y)$, 我們將函數值 $f((x, y))$簡記爲 $f(x, y)$.

(4) **函數**(*function*), **映射**(*mapping*), **變換**(*transformation*) 通常是同義語, 但也有少數的書給予不同的定義.

[例12.1]

函數 $f_1: \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_1(z)=|z|$的定義域是$\mathbb{C}$, 對應域是$\mathbb{R}$, 像集合是 $\{t\in\mathbb{R}\mid t\geq 0\}$.

函數 $f_2: \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, $f_2(z)=|z|$的定義域是$\mathbb{C}$, 對應域是$\mathbb{C}$, 像集合

是 $\{t\in\mathbb{R} \mid t\geq 0\}$

函數 $f_3 : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_3(z) = |z|$ 的定義域是$\mathbb{R}$, 對應域是$\mathbb{R}$, 像集合是 $\{t\in\mathbb{R} \mid t\geq 0\}$.

【要點12a】函數的描述法

① 若要定義函數 f, 除了要指定定義域, 對應域之外, 還要規定出"對應規則". 也就是對定義域內的每個x都要指定好唯一的函數值 $f(x)$.
當定義域爲有限集合時, 對應規則的描述常常是一個個列舉出來.
當定義域爲無限集合時, 通常是用一個數學式描寫任意變數x的函數值 $f(x)$.
但 $f(x)$並不一定要是數學式, 只須明確描述即可.

② 當定義域的元素的表示法不唯一, 而 $f(x)$的規則又根據元素的表示法來描述時, 就產生是否*妥善定義*(*well-defined*)的問題.
證明妥善定義就是要證明在所給的描述下, 確實滿足下列條件:
$\forall x, y\in$定義域, $x=y \Longrightarrow f(x)=f(y)$
若函數的定義不妥善, 那麼這函數的描述根本就錯了.

[例12a.1] 以下爲各種函數的實例:

① $f_1 : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$, $f_1(1)=3$, $f_1(2)=4$, $f_1(3)=3$.

② $f_2 : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2(n)=1+1/n$. [此式常被誤寫爲 $f_2=1+1/n$ 誤必留意!]

③ $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x)=5+\sin x$.

④ $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x)=\begin{cases} 1/(x-5), & x\neq 5 \\ 0, & x=5 \end{cases}$

⑤ $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f_5(x)$=小於等於x的最大正整數.
(f_5就是高斯函數, 電腦領域常稱爲floor function)

[例12a.2] 以下爲函數定義不妥善的實例:

① $g_1 : \mathbb{Q}\longrightarrow \mathbb{Q}$, $g_1(p/q)=(p+1)/(q+1)$.

由公式得$g_1(-1/2)=(-1+1)/(2+1)=0$, $g_1(1/(-2))=(1+1)/(-2+1)=-2$
但$-1/2=1/(-2)$ 所以這個定義不妥善.

② 令$S=\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$
$g_2 : S\longrightarrow S$, $g_2(\cos t+\mathrm{i}\sin t) = \cos(t/2)+\mathrm{i}\sin(t/2)$
由公式得 $g_2(-1)=g_2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=\cos(\pi/2)+\mathrm{i}\sin(\pi/2)=\mathrm{i}$,
另一方面, $g_2(-1)=g_2(\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi))=\cos(-\pi/2)+\mathrm{i}\sin(-\pi/2)=-\mathrm{i}$.
所以這個定義不妥善.

[例12a.3] 定義不妥善時可經適當修改而變成妥善, 但方法不唯一

① $g_1 : \mathbb{Q}\longrightarrow \mathbb{Q}$,
對$x\in\mathbb{Q}$, 令$x=p/q$, p,q爲互質的整數, 且$q>0$,
定義 $g_1(x)=(p+1)/(q+1)$.

② 令$S=\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$
$g_2 : S\longrightarrow S$, 對$x\in S$, 令 $x=\cos t+\mathrm{i}\sin t$, $0\le t<2\pi$
定義 $g_2(x)=\cos(t/2)+\mathrm{i}\sin(t/2)$

③ 令$S=\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$
$g_3 : S\longrightarrow S$, 對$x\in S$, 令 $x=\cos t+\mathrm{i}\sin t$, $-\pi<t\le\pi$
定義 $g_3(x)=\cos(t/2)+\mathrm{i}\sin(t/2)$

[例12a.4] 以下爲定義域元素的表示法不唯一, 但函數定義妥善的實例:

① $h_1 : \mathbb{Q}\longrightarrow \mathbb{Q}$, $h_1(p/q)=(p^2)/(p^2+q^2)$.
若$p/q=r/s$, 則$ps=qr$,
$(p^2)/(p^2+q^2)-(r^2)/(r^2+s^2)$
$=((p^2)(r^2+s^2)-(r^2)(p^2+q^2)) / ((p^2+q^2)(r^2+s^2))$
$=((p^2s^2)-(r^2q^2)) / ((p^2+q^2)(r^2+s^2))=0$
$\therefore\ (p^2)/(p^2+q^2)=(r^2)/(r^2+s^2)$
所以定義妥善.

② 令$S=\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$.
$h_2 : S\longrightarrow S$, $g_2(\cos t+\mathrm{i}\sin t) = \cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t)$

若 $\cos t + i \sin t = \cos s + i \sin s$,

則 ∃整數k, 使 $t=s+2k\pi$,

$\cos(2t) + i \sin(2t)=\cos(2s+4k\pi) + i \sin(2s+4k\pi)=\cos(2s) + i \sin(2s)$

所以定義妥善.

【要點１３】函數的相等

兩函數滿足下述條件時，稱爲相等

(ｉ). 定義域相同

(ｉｉ). 映射規則相同, 即 $\forall x\in$定義域, $f(x)=g(x)$;

但也有許多書另外還要求條件(ｉｉｉ)成立:

(ｉｉｉ). 對應域相同

[說明] (1) 爲討論方便起見，本書將滿足(ｉ)(ｉｉ)的情形稱爲(弱)相等，而將滿足(ｉ)(ｉｉ)(ｉｉｉ)的情形稱爲強相等. 在例12.1中, f_1 和f_2 (弱)相等($f_1=f_2$), 但不是強相等. f_1 和 f_3不相等.

(2) 線性代數通常是採用弱相等的說法. 這種說法與relation的解釋(function看成一種relation)相合.

(3) 條件(ｉ)(ｉｉ)成立已可保證像集合相同.

[例13.1] 設$B=\{b_1 , b_2 \}$ 是向量空間V的基底, 若線性映射$S:V\longrightarrow V$, $T:V\longrightarrow V$滿足

$S(b_1)=T(b_1)$, $S(b_2)=T(b_2)$,

則 $S=T$ (參閱綜線CH7習題3.1)

[證] $\forall\ v\in V$,

令$v=xb_1+yb_2$,

則 $S(v)=S(xb_1+yb_2)=xS(b_1)+yS(b_2)$

$=xT(b_1)+yT(b_2)=T(xb_1+yb_2) =T(v)$

故得證.

[例13.2] 把定義域的每個元素都映到0的函數θ稱爲**零函數**.

對函數$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$,

$f = \theta \iff \forall x \in A, f(x) = 0$

[習題13.1] $f \neq \theta$ 如何描述?

【要點１４】限制定義域

若函數 f 的定義域A包含於函數g的定義域B, 且

$\forall x \in A, f(x) = g(x)$,

則稱 f 是g的**限制**(*restriction*), 記爲 $f = g\restriction_A$, 又稱g是 f 的**擴張**(*extention*)

[例14.1]

接例12.1, 我們通常不特別注意對應域, 所以把 f_1 和 f_2 當作(弱)相等. 但 f_1 和 f_3 本質上不同, 不能說相等. 必須說 f_3 是 f_1 在$\mathbb{R}$的限制. 也就是 $f_3 = f_1\restriction_{\mathbb{R}}$

[例14.2] 設W是向量空間V的子空間, 對線性算子$T: V \longrightarrow V$.

若W是T-invariant, 也就是

$\forall\, w \in W, T(w) \in W$,　　(綜線CH11定義25)

將T的定義域限制在W後, 就成爲W上的線性算子. 也就是

$T\restriction_W: W \longrightarrow W$.　　(當然也可以說是 $T\restriction_W: W \longrightarrow V$)

若W不是T-invariant, 也就是

$\exists\, w \in W$, 使$T(w) \notin W$,

將T的定義域限制在W後, 仍不能成爲W上的線性算子. 只能說

$T\restriction_W: W \longrightarrow V$.

【要點１５】映成

當f的像集合與對應域相同時，稱 f **映成**(*onto*)B，或說 f 是**映成函數**. 有的書把映成函數稱爲**蓋射**(*surjection*).

對函數f：$A \longrightarrow B$，下列各敘述是同一回事:

(ｉ) f 映成B (ｉ') f 是映成函數

(ⅱ) $B = \mathrm{Im}f$ (ⅲ) $B \subseteq \mathrm{Im}f$

(ⅳ) $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$

[說明] (1) (ｉ)適用於定義函數相等時,採用弱相等的情況. 這時“映成”是及物動詞. (ｉ')適用於定義函數相等時,採用強相等的情況. 這時“映成”是形容詞.

(2) 因爲$\mathrm{Im}f \subseteq B$自動成立，所以(ⅱ),(ⅲ)等價.

(3) (ⅳ)是說“每個對應域的元素都被某個定義域的元素對到”.

[例15.1] 設 f：$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定義爲 $f(x) = \sin x$，則

$$\mathrm{Im}f = \{\, y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \le 1 \,\},$$

所以f不是映成函數.

[例15.2] f：$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定義爲 $f(x) = x^3 - x$，則$\mathrm{Im}f = \mathbb{R}$， f是映成函數.

[習題15.1] f：$A \longrightarrow B$ 不是映成如何描述?

【要點１６】一對一

◎ 若f不發生“相異兩點映到同一點”的情形，則稱 f 是**一對一**(*one-to-one*)函數，一對一函數又稱爲**嵌射**(*injection*).

◎ 對函數f：$A \longrightarrow B$，下列各敘述是同一回事

(ｉ) f是一對一(one-to-one)函數

(ii) $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

(iii) $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$　　$\longleftarrow$ 標準證明格式

◎一對一且映成的函數又稱為對射(*bijection*).

[說明] (1) 有許多同學把一對一誤以為是:

$$x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

對函數 f 來說, 這句話當然必須成立(否則就是函數定義錯誤).

(2) 若 f 是線性映射, 則一對一的判別可利用ker$f$決定(綜合線性代數CH8定理7), 對非線性的函數就只能用這裡的原始定義.

[例16.1] 設 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = x^3 - x$, 則 $f(1) = f(-1)$,

$\therefore$ f 不是一對一函數

[例16.2] 設 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = x^3 + x$, 則 f 是一對一函數,

證明如下:

若 $f(x) = f(y)$, 則 $x^3 + x = y^3 + y$,

移項再分解因式,得 $(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0$,

$\because$ $x^2 + xy + y^2 + 1 = (x+y/2)^2 + 3y^2/4 + 1$ 恆正,

$\therefore$ $x - y = 0$,

$\therefore$ $x = y$

[例16.3] 設 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = x^2$, 則 f 不是一對一函數.

對$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $f\restriction_D$ 是一對一函數.

[習題16.1] “f 不一對一” 如何描述?

[習題16.2] 對下列各小題, 判定

(a) 是不是一對一?

(b) 是不是映成?

並寫出證明或反例.

① $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, 定義為 $f(x,y)=(x+y,2x+y)$

② $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$,定義為 $f(x,y)=(x+y,\ 2x+y,\ x-y+1)$

③ $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$,定義為 $f(x,y,z)=(x+y,2x+z)$

④ $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$,定義為 $f(x,y,z)=(x+y-z,2x+2y-2z)$

【要點１７】複合函數

① 設函數 $f:A\longrightarrow B,\ g:B\longrightarrow C$, 定義 $h:A\longrightarrow C$ 為

$$h(x)=g(f(x)),\ x\in A\ ;$$

h稱為g,f 的複合(*composition*), 記為 $h=g\circ f$.

② 函數的複合具有結合性: $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ (見例17.3)

[說明] (1) 注意次序! $g\circ f$ 是先做 f 再做g.

[例17.1] 設 $A=\{1,2,3\}, f:A\longrightarrow A, g:A\longrightarrow A$, 定義如下:

$f(1)=3, f(2)=1, f(3)=1, g(1)=2, g(2)=3, g(3)=1$

則 $g\circ f:A\longrightarrow A$ 的映射如下

$(g\circ f)(1)=1,\quad (g\circ f)(2)=2,\quad (g\circ f)(3)=2$

[例17.2] 設 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x+1,\quad g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=\sin x$,

則 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=\sin(x+1)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=\sin x+1$

[例17.3] 設函數 $f:A\longrightarrow B,\quad g:B\longrightarrow C,\quad h:C\longrightarrow D$,

則 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$

[證] 先檢查定義域與對應域:

由已知得, $(h\circ g):B\longrightarrow D,\quad (g\circ f):A\longrightarrow C,$

$\therefore\ (h\circ g)\circ f: A \longrightarrow D,\quad h\circ(g\circ f): A\longrightarrow D$

再檢查映射規則:

$\forall x\in A,$

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$

$=h((g\circ f)(x))=(h\circ(g\circ f))(x)$

故得證.

[習題17.1]

設 $f: A\longrightarrow B,\quad g: B\longrightarrow C$, 且 $h=g\circ f: A\longrightarrow C$

若 f, g 都一對一, 證明 h也一對一.

[習題17.2]

設 $f: A\longrightarrow B,\quad g: B\longrightarrow C$, 且 $h=g\circ f: A\longrightarrow C$

若 f, g都映成, 證明 h也映成.

【要點１８】恆等函數

若函數 $f: A\longrightarrow A$, 滿足

$\forall x\in A, f(x)=x$;

則稱 f 是A上的恆等(*identity*)函數, 記為 $f=I$, 或 $f=I_A$, 或 $f=\mathrm{Id}_A$.

[說明] (1) 不強調A時, I_{A} 常簡記為I.

(2) $I\circ f=f,\quad f\circ I=f$.　(習題18.1)

[習題18.1]

設 $f: A\longrightarrow B$, 證明 $I_{\mathrm{B}}\circ f=f,\quad f\circ I_{\mathrm{A}}=f$

【要點１９】可逆

① 對函數 $f{:}A \longrightarrow B$, 若存在函數 $g{:}B \longrightarrow A$, 滿足

$\forall a \in A, g(f(a)) = a$ （即 $g \circ f = I_A$）

則稱 g 爲 f 的左反(*left inverse*)

② 對函數 $f{:}A \longrightarrow B$, 若存在函數 $g{:}B \longrightarrow A$, 滿足

$\forall b \in B, f(g(b)) = b$ （即 $f \circ g = I_B$）

則稱 g 爲 f 的右反(*right inverse*)

③ 對函數 $f{:}A \longrightarrow B$, 若存在函數 $g{:}B \longrightarrow A$, 滿足

[1] $\forall a \in A, g(f(a)) = a$ （即 $g \circ f = I_A$）

[2] $\forall b \in B, f(g(b)) = b$ （即 $f \circ g = I_B$）

則稱 f 爲可逆(*invertible*)函數, 並稱 g 爲 f 的反函數(*inverse*).

④ 對函數 $f{:}A \longrightarrow B$, $g{:}B \longrightarrow C$,

若 f, g都可逆, 則$g \circ f$也可逆, 且$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (參綜線CH8定理27a)

⑤ 對函數 $f{:}A \longrightarrow B$,

若 f 可逆, 則 f^{-1} 也可逆, 且$(f^{-1})^{-1} = f$.

[說明] (1) 可逆 $\Longleftrightarrow$ 有反函數 $\Longleftrightarrow$ 有右反兼左反

(2) 有右反未必有左反, 有左反未必有右反. (見例19.2)

(3) 可逆條件[1]相當於: $b = f(a) \Longrightarrow g(b) = a$

可逆條件[2]相當於: $a = g(b) \Longrightarrow f(a) = b$

合併起來就是 $b = f(a) \Longleftrightarrow a = g(b)$

(4) g是f 的反函數 $\Longleftrightarrow$ f 是g的反函數.

[例19.1]

設 $A = B = \mathbb{Z}$,

$f: A \longrightarrow B$, $f(x) = x + 5$,

$g: B \longrightarrow A$, $g(x) = x - 5$;

$\forall x \in A$, $g(f(x)) = g(x+5) = x$,

$\forall x \in B,\quad f(g(x))=f(x-5)=x,$

即　$g \circ f = I_A\ ,\ f \circ g = I_B$

$\therefore$ f, g都可逆, 且互爲反函數.

[例19.2]

設 $A=\{1,2,3\},\ B=\mathbb{Z}$,

$f: A \longrightarrow B,\quad f(x)=x+5,$

$$g: B \longrightarrow A,\quad g(x)=\begin{cases} x-5 & ;\ x=6,7,8 \\ 1 & ;\ \text{其它} \end{cases}$$

則 $g \circ f = I_A\ ,\ f \circ g \neq I_B$.

(f一對一, 不映成 , g映成, 不一對一, 參閱要點20③)

[例19.3] 證明④如下:　　　　(參閱綜線CH2定理12)

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1}$　　(結合律)

$= (g \circ I_B) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_C$

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f)$　　(結合律)

$= f^{-1} \circ (I_B \circ f) = f^{-1} \circ f = I_A$.

由定義即得證.

[習題19.1] 證明⑤

【要點20】

① 對函數 $f: A \longrightarrow B$, 若 g 爲 f 的左反, h 爲 f 的右反, 則 $g=h$.

② 對函數 $f: A \longrightarrow B$, 若 g, h 都是 f 的反函數, 則 $g=h$.

③ 若 $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$, 且 $g \circ f = I_A$ 則 f爲一對一, g爲映成.

④ f爲一對一 $\Longleftrightarrow$ f有左反.　(例20.3)

⑤ f爲映成 $\Longleftrightarrow$ f有右反.　(例20.4)

⑥ f爲一對一且映成 $\Longleftrightarrow$ f可逆.

[說明] (1) 由①, 我們可將要點19說明1推廣爲:

可逆 $\Longleftrightarrow$ 有反函數 $\Longleftrightarrow$ 有右反兼左反 $\Longleftrightarrow$ 有右反且有左反

(2) ②說明反函數具有唯一性.

(3) 由④⑤即得⑥, 因有這個定理, 所以有的書就乾脆將可逆函數定義爲一對一且映成的函數. (參閱綜線CH8定理28a)

[例20.1] 證明①如下:

$g=g\circ I_B=g\circ(f\circ h)$

$=(g\circ f)\circ h$ (要點17②)

$=I_A\circ h=h.$

由①即得②.

[例20.2] 證明③如下:

$\forall x, y\in A$, 若 $f(x)=f(y)$,

則 $g(f(x))=g(f(y))$,

此即 $x=y$

$\therefore$ f一對一

$\forall\, a\in A$, 令 $b=f(a)$,

則 $g(b)=g(f(a))=a$

$\therefore$ g映成

[例20.3] ④ 對函數 $f: A\longrightarrow B$,

f 一對一 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, g: B\longrightarrow A$, 使 $g\circ f=I_A$

[證] [$\Longleftarrow$] 由③即得

[$\Longrightarrow$] 我們定義$g: B\longrightarrow A$如下:

對$b\in b\setminus \mathrm{Im}f$, 任取一個$A$中的元素當做$g(b)$.

對$b\in \mathrm{Im}f$, 必存在a,使得$f(a)=b$,

再由 f 一對一可知滿足$f(a)=b$的a只有一個.

我們定義$g(b)=a$.

以下驗證 $g\circ f=I_A$:

$\forall x\in A$,

令$y=f(x)$, 由g的定義得知$g(y)=x$,

$\therefore\ g(f(x))=x$

即 $(g\circ f)(x)=I_A(x)$

[例20.4] ⑤ 對函數 $f: A\longrightarrow B$,

f 映成 $\Longleftrightarrow \exists\, g: B\longrightarrow A$, 使 $f\circ g=I_B$

[證] [$\Longleftarrow$] 由③即得

[$\Longrightarrow$] 我們定義$g: B\longrightarrow A$如下:

對$b\in B$, 因 f 映成, 必存在$x\in A$,使得$f(x)=b$,

任取一個$a\in A$, 使得$f(a)=b$, 並定義$g(b)=a$.　　(Axiom of Choice)

以下驗證 $f\circ g=I_B$:

$\forall y\in B$,

令$x=g(y)$, 由g的定義得知x須符合$f(x)=y$,

$\therefore\ f(g(y))=y$

即 $(f\circ g)(y)=I_B(y)$

[習題20.1] 不利用④⑤, 直接造出反函數來證明⑥.

【要點21】直像與反像

設函數$f: A\longrightarrow B$, $X\subseteq A$, $Y\subseteq B$,

定義 $f[X]=\{\, b \mid \exists x\in X, f(x)=b\,\}=\{\, f(x) \mid x\in X\,\}$,

稱爲X的直像(*direct image*, 或*image*).

用法 $b\in f[X] \Longleftrightarrow \exists x\in X, f(x)=b$

定義 $f^{-1}[Y]=\{a \mid a\in A, f(a)\in Y\}=\{a\in A \mid f(a)\in Y\}$,

稱爲Y的反像(*inverse image*).

用法　$a\in f^{-1}[Y] \iff f(a)\in Y$

[說明] (1) 注意到在此 $f^{-1}[\quad]$ 只是一個符號，並不保證 f 有反函數.

(2) 在 f 可逆時，Y在 f 之下的反像和Y在反函數 f^{-1} 之下的直像完全相同.

(3) $f[X]$ 也記做 $f(X)$，$f^{-1}[Y]$ 也記做 $f^{-1}(Y)$

(4) 直像與反像並不互相抵消，事實上：

$f[f^{-1}[Y]]\subseteq Y$，$f^{-1}[f[X]]\supseteq X$

(5) 對 $f: A\longrightarrow B$，

$\mathrm{Im}f=f[A]$．$f^{-1}[B]=f^{-1}[\mathrm{Im}f]=A$.

$f^{-1}[B]=f^{-1}[B\cap\mathrm{Im}f]$

定義域的直像是值域. 對應域與值域的反像都是定義域.

(6) 對 $f: A\longrightarrow B$，及$S\subseteq A$，

$\mathrm{Im}(f\restriction_S)=f[S]$

[例21.1] 設$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 定義爲

$f(1)=2$，$f(2)=2$，$f(3)=1$，$f(4)=2$.

$f[\{2,3,4\}]=\{f(x)\mid x\in\{2,3,4\}\}$

$=\{f(2),\ f(3),\ f(4)\}=\{2, 1, 2\}=\{1, 2\}$

$f^{-1}[\{2,3,4\}]=\{x\mid f(x)\in\{2,3,4\}\}=\{1, 2, 4\}$

$f^{-1}[f[\{2,3,4\}]]=f^{-1}[\{1, 2\}]=\{1, 2, 3, 4\}$

$f[f^{-1}[\{2,3,4\}]]=f[\{1,2,4\}]=\{2\}$

請由最後兩式畫圖觀察[說明(4)]所說的現象.

[例21.2] 設$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$定義爲 $f(x)=x^2$，$X=\{x\mid -1<x<2\}$，

$Y=\{y\mid -1\leq y\leq 9\}$，則

$f[X]=\{f(x)\mid -1<x<2\}=\{x^2\mid -1<x<2\}=\{y\mid 0\leq y<4\}$

$f^{-1}[Y]=\{x\mid f(x)\in Y\}=\{x\mid -1\leq x^2\leq 9\}$

$=\{x\mid x^2\leq 9\}=\{x\mid -3\leq x\leq 3\}$

【要點22】反像的性質

考慮函數$f: A \longrightarrow B$，對$X, Y \subseteq B$,

① $f^{-1}[X\cap Y]=f^{-1}[X]\cap f^{-1}[Y]$

$f^{-1}[X\cup Y]=f^{-1}[X]\cup f^{-1}[Y]$

$f^{-1}[X\setminus Y]=f^{-1}[X]\setminus f^{-1}[Y]$

② $X\subseteq Y \Longrightarrow f^{-1}[X]\subseteq f^{-1}[Y]$

③ $f[f^{-1}[Y]]=Y\cap \mathrm{Im} f$

[說明] (1) 直像的性質較不理想, 此處不討論.

[例22.1] 證明 $f^{-1}[X\setminus Y]=f^{-1}[X]\setminus f^{-1}[Y]$

[證]: $x\in f^{-1}[X\setminus Y]$

$\Longleftrightarrow f(x)\in X\setminus Y$

$\Longleftrightarrow f(x)\in X$ 且 $f(x)\notin Y$

$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}[X]$ 且 $x\notin f^{-1}[Y]$

$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}[X]\setminus f^{-1}[Y]$

[例22.2] 證明 $f[f^{-1}[Y]]=Y\cap \mathrm{Im} f$

證: [$\subseteq$] 若 $x\in f[f^{-1}[Y]]$,

則 $\exists a\in f^{-1}[Y]$ 使得$x=f(a)$

$\therefore f(a)\in Y$　　($\because a\in f^{-1}[Y]$)

$\therefore f(a)\in Y\cap \mathrm{Im} f$

即 $x\in Y\cap \mathrm{Im} f$

[$\supseteq$] 若 $x\in Y\cap \mathrm{Im} f$, 則 $x\in Y$ 且 $x\in \mathrm{Im} f$.

由 $x\in \mathrm{Im} f$, 得知 $\exists a$ 使得 $x=f(a)$

由 $x\in Y$ 得知 $a\in f^{-1}[Y]$

$\therefore x\in f[f^{-1}[Y]]$

【要點23】函數的運算

對函數 $f, g: A \longrightarrow B$, 若對應域$B$上具有某個運算 $*$, 則可定義

$f*g: A \longrightarrow B$,

$(f*g)(x)=f(x)*g(x)$

[說明] (1) $f*g$的定義是由定義域逐點拼成, 所以由 f, g形成 $f*g$的運算*稱爲點態(point-wise)運算.

[例23.1] 設$f: \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$定義爲$f(0)=5, f(1)=2$;

$g: \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$定義爲$g(0)=1, g(1)=7$, 則

$f+g: \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}, (f+g)(0)=6, (f+g)(1)=9$

$f-g: \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}, (f-g)(0)=4, (f-g)(1)=-5$

[例23.2] 設 $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 定義爲

$f(x)=(x,1)$, $g(x)=(-x, x)$, 則

$(f+g)(x)=(x,1)+(-x, x)=(0, x+1)$

$(f-g)(x)=(x,1)-(-x, x)=(2x, 1-x)$

習 題 解 答

[習題7.1解]

[證]　假設 $A\cap(B\setminus A)\neq\phi$,

則存在某個x, 使得$x\in A\cap(B\setminus A)$

$\therefore$ $x\in A$ 且 $x\in B\setminus A$

即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin A$

即 $x\in A$ 且 $x\notin A$

此為矛盾.

[習題7.2解]

[證] [$\Longrightarrow$] 已知 $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$, 現欲證 $A\subseteq B\cap C$:

若 $x\in A$, 由$A\subseteq B$得知$x\in B$, 再由$A\subseteq C$得知$x\in C$

$\therefore$ $x\in B\cap C$

[$\Longleftarrow$] 已知 $A\subseteq B\cap C$, 欲證 $A\subseteq B$

若 $x\in A$, 由已知, 得$x\in B\cap C$, $\therefore$ $x\in B$

同理可證 $A\subseteq C$.

[習題8.1解]

下列各敘述等價:

(i) $A\neq B$

(ii) $B\neq A$

(iii) $A\not\subseteq B$ 或 $A\not\supseteq B$

(iv) $\neg(x\in A \Longleftrightarrow x\in B)$

(v) $(\exists x\in A$使得$x\notin B)$ 或 $(\exists y\in B$使得$y\notin A)$

(vi) $A\setminus B\neq\phi$ 或 $B\setminus A\neq\phi$

(vii) $A \triangle B \neq \phi$

[習題13.1解]

$\exists x \in A$ 使 $f(x) \neq 0$

[習題15.1解]

$\exists y \in B$, 使$\forall x \in A, f(x) \neq y$

[習題16.1解]

$\exists x, y$ 使$x \neq y, f(x) = f(y)$

[習題16.2解]

① $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,$f(x, y) = (x+y, 2x+y)$

一對一，映成 . 讀者自證.

② $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$， $f(x, y) = (x+y, 2x+y, x-y+1)$

對$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$，試解 $f(x, y) = (a,b,c)$，即

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x+y=b, \\ x+y-1=c \end{cases}$$

以列運算求解: (綜合線性代數CH3)

$$\begin{array}{c} (-1)(-2) \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & c+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & c+1-a \end{array}\right]$$

$\therefore$ 有解 $\Longleftrightarrow$ $c+1-a=0$ $\Longleftrightarrow$ $c=a-1$

當有解時，非零列數與未知數個數相同，爲恰有一解

(綜合線性代數CH3定理10)

$\therefore$ 一對一，不映成.

(此題 $\mathrm{Ker}f = \phi$，它不是$\mathbb{R}^2$ 的子空間.)

③ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(x+y,2x+z)$

映成, 不一對一. 讀者自證.

④ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(x+y-z,2x+2y-2z)$

不一對一, 不映成. 讀者自證.

[習題17.1解]

[證]

$h(x)=h(y)$

$\Longrightarrow g(f(x))=g(f(y))$

$\Longrightarrow f(x)=f(y)$ 　　(∵ g一對一)

$\Longrightarrow x=y$ 　　(∵ f一對一)

∴ h一對一.

[習題17.2解]

[證] $\forall\, c\in C$,

∵ g映成,

∴ $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$

∵ f 映成,

∴ $\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$

於是 $h(a)=g(f(a))=g(b)=c$

∴ h映成.

[習題18.1解]

[證] $\forall\, x\in A$, $(I_B\circ f)(x)=I_B(f(x))=f(x)$

∴ $I_B\circ f=f$.

$\forall\, x\in A$, $(f\circ I_A)(x)=f(I_A(x))=f(x)$

∴ $f\circ I_A=f$.

[習題19.1解]

[證] 令$g=f^{-1}$, 由 f 可逆的定義得

$g\circ f=I_A$, $f\circ g=I_B$

上式表示f是g的右反兼左反,

$\therefore$ g也可逆，且 $g^{-1}=f$.

[習題20.1解]

對函數 $f: A\longrightarrow B$，欲證

f 一對一且映成 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, g: B\longrightarrow A$，使 $f\circ g=I_{\mathrm{B}}$ 且 $g\circ f=I_{\mathrm{A}}$

[$\Longleftarrow$] 讀者自證

[$\Longrightarrow$] 我們定義$g: B\longrightarrow A$如下:

對$b\in B$，因 f 映成，必存在$a\in A$,使得$f(a)=b$,

又因 f 一對一,

$\therefore$恰有一個$a\in A$，使得$f(a)=b$,

我們定義$g(b)=a$.

以下驗證 $g\circ f=I_{\mathrm{A}}$:

$\forall x\in A$,

令$y=f(x)$，由g的定義得知$g(y)=x$,

$\therefore$ $g(f(x))=x$

即 $(g\circ f)(x)=I_{\mathrm{A}}(x)$

以下驗證 $f\circ g=I_{\mathrm{B}}$:

$\forall y\in B$,

令$x=g(y)$，由g的定義得知$f(x)=y$,

$\therefore$ $f(g(y))=y$

即 $(f\circ g)(y)=I_{\mathrm{B}}(y)$