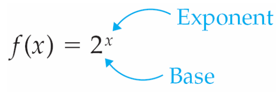
Section 4.1 Exponential function 指數函數

【Topic 1. 指數函數】Exponential Functions

1. 一個函數如果有變數在指數次方，如 $f(x) = 2^x$，則稱為指數函數 (*exponential function*)，其中 2 稱為基底(**base**)。



更正式一點的定義為：

Exponential Functions

For any number $a > 0$, the function
$$f(x) = a^x$$
is called an *exponential function* with base a and exponent (or power) x.

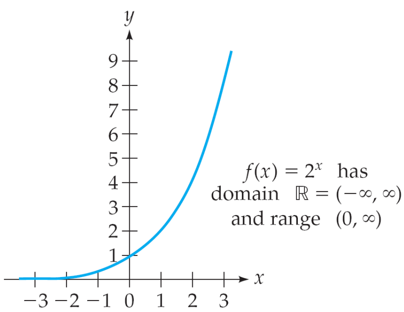
Brief Examples

$f(x) = 2^x$ has base 2

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ has base $\frac{1}{2}$

2. 下列表格顯示指數函數 $f(x) = 2^x$ 的某些值，以及它的圖形顯示在右。

x	$y = 2^x$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

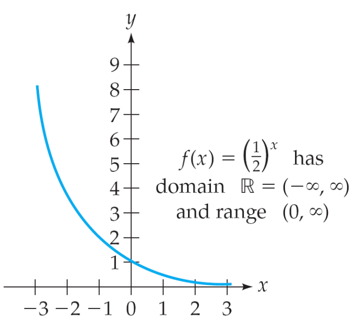


Graph of $y = 2^x$

請注意，指數函數 2^x 圖形與拋物線 x^2 圖形很不一樣。尤其是 2^x 圖形沒有對稱於 y 軸，同時它擁有水平漸近線 $x = 0$。(因為 $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$)

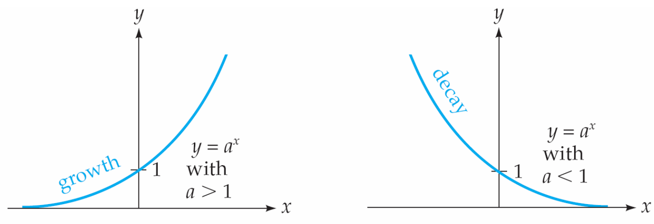
3. 下列表格顯示指數函數 $f(x) = (1/2)^x$ 以及它的圖形顯示在右。請注意此圖為 $y = 2^x$ 的鏡射影像，同時兩者皆通過點 (0, 1)。

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$



Graph of $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

我們可以定義任何以<u>正數 a 為基底</u>的指數函數 $f(x) = a^x$ (本章之後的的基底都代表正數)。當指數函數的基底大於 1 ($a > 1$)，則採用成長的模型 (如左下圖示)，如果指數函數的基底小於 1 ($a > 1$)，則採用衰退的模型 (如右下圖示)。(基底 $a = 1$，指數函數為一條水平線)



$y = a^x$ slopes *upward* for base $a > 1$. $y = a^x$ slopes *downward* for $a < 1$.

【Topic 2. 複合利率】Compound Interest (複利)

1. 複利的投資，金錢會以指數成長。銀行通常只公佈年利率 (*annual* interest rates)，但往往複利的次數會更加頻繁。舉例來說，如果一間銀行提供年利率 8%，並且每一季複利一次 (即每一季增加 2% 的本金進入帳戶內)，假設你一開始投資 P 美元 (這代表資本：the **principal**)，在第一季結束時你的帳戶內將有 $1.02P$ 美元，如下所示。

$$\begin{pmatrix}\text{Value after}\\ t\text{ years}\end{pmatrix} = P\cdot(1+0.02)$$

2. 假設每一季都是增加帳戶內本金的 2%，等同於不斷在本金上乘上 $(1 + 0.02)$。因為一年有四季，t 年將有 $4t$ 季。因此，要計算 t 年後你的帳戶內有多少錢，我們只要簡單的將本金乘上 $(1 + 0.02)$ 乘 $4t$ 次。即

$$\begin{pmatrix}\text{Value after}\\ t\text{ years}\end{pmatrix} = P\cdot(1+0.02)^{4t}$$

3. 對年利率 8% 而言，每一季的利率是 $0.08/4 = 2\%$。上述可以被任意的利率 r 給取代，同時 m 代表每年複利的次數。舉例說明，如果每月複利一次，則 $m = 12$；如果每天複利一次，則 $m = 365$ (非潤年)。

Compound Interest

For P dollars invested at annual interest rate r compounded m times a year for t years,

$$\begin{pmatrix}\text{Value after}\\ t\text{ years}\end{pmatrix} = P\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

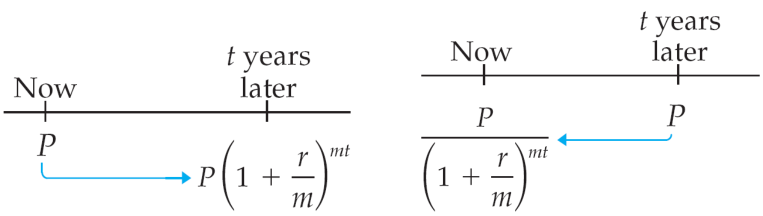
r = annual rate
m = periods per year
t = number of years

※ 例 1. *FINDING A VALUE UNDER COMPOUND INTEREST*

Find the value of \$4000 invested for 2 years at 12% compounded quarterly.

【Topic 3. 現值】Present Value

1. 未來價值 (*future value*) 是現值 (*present value*) 在未來的本利和，如範例 1 所示，\$4000 的現值在 12%，每季複利一次，兩年之後的未來價值為 \$5067.08。如果已知現值為 P，則未來價值為 $P\cdot\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{mt}$；反之若未來價值為 P，則過去的現值為 $\dfrac{P}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{mt}}=P\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{-mt}$。



Future value　　　Present value

Present Value

For a future payment of P dollars at annual interest rate r compounded m times a year to be paid in t years,

$$\begin{pmatrix}\text{Present}\\ \text{value}\end{pmatrix}=\frac{P}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}$$

r = annual rate
m = periods per year
t = number of years

※ 例 2. *FINDING PRESENT VALUE*

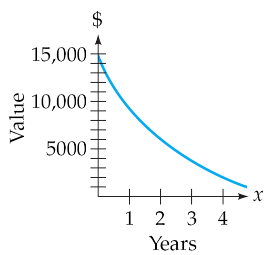
Find the present value of \$5000 to be paid 8 years from now at 10% interest compounded semiannually.

【Topic 4. 以固定比例貶值】Depreciation by a Fixed Percentage

1. 固定比例貶值指的是，某項設備每年由現值所損失的百分比相同。固定比例貶值就像複利一樣，只是它的利率是個負值。因此我們同樣可以使用複利的公式 $P(1+r/m)^{mt}$，其中 m = 1 (因為年貶值是每年計算)，r 是一個負數。

※ 例 3. *DEPRECIATING AN ASSET* (財產或資產)

A car worth \$15,000 depreciates in value by 40% each year. How much is it worth after 3 years?



2. 範例 3 所示的「固定比例貶值」與「直線貶值」大不相同。若為直線貶值，則每年貶值相同的金額，若為固定比例貶值，每年貶值相同的百分比，但是貶值的金額為逐年減少 (因為價值每年也在減少)。

3. 固定比例貶值(又稱為衰退餘額方法 **declining balance method**)為一種加速貶值(**accelerated depreciation**)。用來估計資產或商品的價值因使用的貶值方法而不同。

【Topic 4. 自然對數的底數 e】The Number e

1. 想像一下一個銀行提供 100% 的年利率，你的存款有 \$1。
   (A). 對年複利一次而言，一年後你可以獲得利息 \$1，本金變成 \$2。

   (B). 對季複利一次而言，一年後獲得的本利和為 $1\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)^{4\cdot 1}=(1.25)^4\approx 2.44$，比年複利一次還多出 44% 的利息收入。

   (C). 對日複利一次而言，一年後獲得的本利和為 $1\cdot\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365\cdot 1}\approx 2.71$，比季複利一次還多出 27% 的收入。

很明顯，如果你的利率與本金，與存款的時間相同，則產生價值會隨著複利次數增加而增加。一般來說，如果每年複利 m 次，則一年後本利和為 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$。

Value of \$1 at 100% Interest Compounded *m* Times a Year for 1 Year

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	*Answer (rounded)*	
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	$=2.00000$	Annual compounding
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	≈ 2.44141	Quarterly compounding
365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	≈ 2.71457	Daily compounding
10,000	$\left(1+\frac{1}{10{,}000}\right)^{10{,}000}$	≈ 2.71815	
100,000	$\left(1+\frac{1}{100{,}000}\right)^{100{,}000}$	≈ 2.71827	
1,000,000	$\left(1+\frac{1}{1{,}000{,}000}\right)^{1{,}000{,}000}$	≈ 2.71828	
10,000,000	$\left(1+\frac{1}{10{,}000{,}000}\right)^{10{,}000{,}000}$	≈ 2.71828	Answers agree to five decimal places

2. 注意上頁表格，當 m 的值不斷的增大，右邊的值穩定到一個數值，約為 2.71828. 即當 m 趨近於無限大，則極限值近似於 2.71828. 這個特殊的數字在數學裡非常的重要，稱為「自然對數的底數 e」(就如同 $\pi = 3.14159\ldots$)。下列為 e 的定義：

The Constant e

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$$

The dots mean that the decimal expansion goes on forever

相同的 e 會出現在機率與統計當中，如 normal distribution (鐘形分佈)等等。它的值已經被計算超過小數點後一百萬位數，而小數點後十五位數的近似值為 $e \approx 2.718281828459045$.

【Topic 5. 連續複利】Continuous Compounding of Interest

1. 當固定時間內複利的次數趨近於無線多次，我們則稱為連續複利 (**continuous compounding**)。我們在上一個 topic 中已經證明了\$1 在 100% 的利率中，經過一年後的本利和為 e dollars (約\$2.71828).

2. 下列公式為計算連續複利的公式：

Continuous Compounding

For P dollars invested at annual interest rate r compounded continuously for t years,

$$\begin{pmatrix}\text{Value after}\\ t \text{ years}\end{pmatrix} = Pe^{rt}$$

證明： (補充)

$$\lim_{m \to \infty} P \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = \lim_{m \to \infty} P \cdot \left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{mt}, \text{ let } n = \frac{m}{r}$$

$$\text{原式} = \lim_{m \to \infty} P \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nrt} = P \cdot \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nrt} = P \cdot \left(\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{rt} = P \cdot e^{rt}$$

※ 例 4. *FINDING VALUE WITH CONTINUOUS COMPOUNDING*

Find the value of \$1000 at 8% interest compounded continuously for 20 years.

【Topic 6. 現值使用連續複利】Present Value with Continuous Compounding

如同 Topic 3 所示，現值在經過 t 年之後的本利和會變成未來值，如 Topic 5 所示，若現值為 P，則未來值為 $P\cdot e^{rt}$，反之若未來值為 P，現值則為 $P/e^{rt} = P\cdot e^{-rt}$。

Present Value with Continuous Compounding

For a future payment of P dollars at annual interest rate r compounded continuously to be paid in t years,

$$\begin{pmatrix}\text{Present}\\ \text{value}\end{pmatrix} = \frac{P}{e^{rt}} = Pe^{-rt}$$

例 5. *FINDING PRESENT VALUE WITH CONTINUOUS COMPOUNDING*

The present value of \$5000 to be paid in 10 years, at 7% interest compounded continuously, is

$\frac{5000}{e^{0.07\cdot 10}} = \frac{5000}{e^{0.7}} \approx \$2482.93$ Using a calculator >> 這個是答案。

請注意這邊的 \$5000 為 future payment，因為是五千美元將在十年後被付出，以連續複利計算現值為多少，要用除法 (現在存入較少的錢，未來會獲得較多的錢)。

【Topic 7. 連續複利的直觀意義】Intuitive Meaning of Continuous Compounding

以季複利而言，整季的利息會(延遲)到季末才會加入你的帳戶之中。如果是使用連續複利，則你的利息是當它被賺進來時就立即增加本金，沒有任何的延遲。這些額外賺進的連續複利又立即存入本金開始為你產生利息。

【Topic 8. 如何比較利率】How to Compare Interest Rates

你要如何比較不同的利率？利如 16% 的季複利與 15.8% 的連續複利？你可以簡單的看對每一種利率存入 \$1 之後的本利和為多少即可判斷，如例題 6。

※ 例 6. *COMPARING INTEREST RATES*

Which gives a better return: 16% compounded quarterly or 15.8% compounded continuously?

<Sol>: For 16% compounded quarterly (on \$1 for 1 year), $1\cdot\left(1+\frac{0.16}{4}\right)^4 = (1.04)^4 \approx 1.170$

For 15.8% compounded continuously (on \$1 for 1 year), $1\cdot e^{0.158} \approx 1.171$ << better。

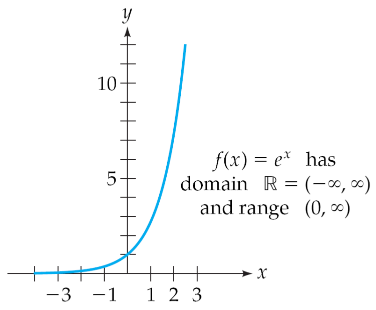
一年之內本金實際上增加的百分比稱為「有效年利率」或「實際年利率」(**effective rate of interest**)、「年百分率」 (**annual percentage rate：APR**)、或「年報酬率」 (**annual percentage yield：APY**)。

實際年利率（Effective Interest Rate）是指當以複利計算時，「實際上」得到的利息和本金計算得出的「年利率」。以例題 6 為例，15.8% 的連續複利計算，\$1 在一年之後將可獲得 \$1.171，扣除掉本金之後，利息收獲 \$0.171，即實際年利率相當於 17.1%。這裡所提到的 15.8% 又稱為名義上的利率(**nominal** rate of interest)，即名義上 15.8% 連續複利計算相當於實際年利率(APR) 17.1%，銀行通常被要求公開的是實際年利率。

【Topic 9. 指數函數 $y=e^x$ 】The Function $y=e^x$

1. 實數 e gives 給我們一個全新的指數函數 $f(x)=e^x$。這個函數被廣泛的應用在商業、經濟、以及所有領域的科學。下表列舉某些 x 值與相對應的 e^x 值，由這些值繪出函數圖形如下。

x	$y=e^x$
-3	$e^{-3}\approx 0.05$
-2	$e^{-2}\approx 0.14$
-1	$e^{-1}\approx 0.37$
0	$e^{0}=1$
1	$e^{1}\approx 2.72$
2	$e^{2}\approx 7.39$
3	$e^{3}\approx 20.09$



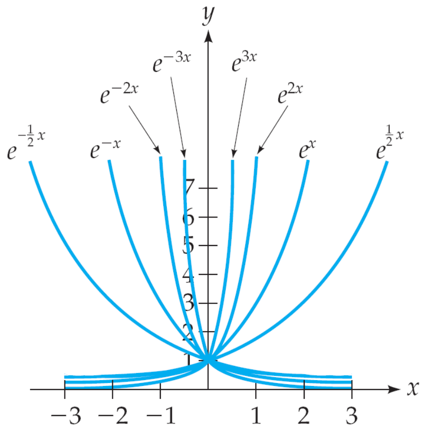
Graph of $y=e^x$ is $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$
and range is $(0,\infty)$.

2. 請注意 e^x 一定不等於 0，且對任意的 x 值，e^x 一定是正數，即使 x 為負值。(所有指數函數都有此性質)

> e to any power is positive.

3. 右圖顯示函數 $f(x)=e^{kx}$ 以及多個不同的常數值 k。對正的 k 值而言，函數曲線為遞增向上；對負的 k 值而言，函數曲線為遞減向下。

   k 值越大，曲線遞增坡度越陡 (成長的速度越快)，每個曲線都以 x 軸為水平漸近線，同時與 y 軸交於 (0,1) 這個點。



$f(x)=e^{kx}$ for various values of k.

Section 4.2 Logarithmic Function 對數函數

本節我們要介紹的是對數函數，特別是自然對數函數 (*natural* logarithm function)。稍後我們將應用自然對數函數到許多種不同的問題。

【Topic 1. 對數】Logarithms

1. **Logarithm** 這個字(縮寫成 **log**) 意指：指數 (*power* or *exponent*)。指數中的底數(base)寫在 log 的右下角下註標。例如，$\log_{10} 1000$ 意指 10 的若干次方會得到真數 1000。因為 $10^3 = 1000$，因此指數值為 3，所以 $\log_{10} 1000 = 3$。我們要找「對數值」通常會改寫成「指數形式」並且找出其「指數值」。

※ Example 1 – *FINDING A LOGARITHM*

Evaluate (a) $\log_{10} 100$ (b) $\log_2 0.125$ (c) $\log_3 729$

2. 以 10 為底數的對數函數又稱為一般對數 (**common logarithms**) ，且通常可省略底數，因此 log100 代表的是 $\log_{10}100$。
3. 我們可以使用其它底數的對數。任意的正數(1 除外)可被當成底數。一般而言，對任意的正數基底 a (1 除外)，指數與對數的等價關係如下：

Logarithms	
$\log_a x = y$ is equivalent to $a^y = x$	$\log_a x$ means the exponent to which we raise a to get x

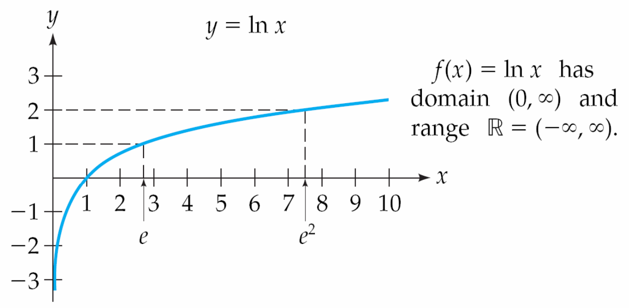
【Topic 2 自然對數】Natural Logarithms

1. 最廣泛被使用的基底為 e (近似於 2.71828)。以 e 為底數的對數函數又稱為自然對數 (**natural logarithms** or **Napierian logarithms**)。x 的自然對數寫成 $\ln x$ (其中“*n*”代表“natural”)以取代 $\log_e x$。

Natural Logarithms	
$\ln x$ = logarithm of x to the base e	$\ln x$ means $\log_e x$

2. 下列為自然對數 (natural logarithm) 函數 $f(x) = \ln x$ 數值表格與圖示。

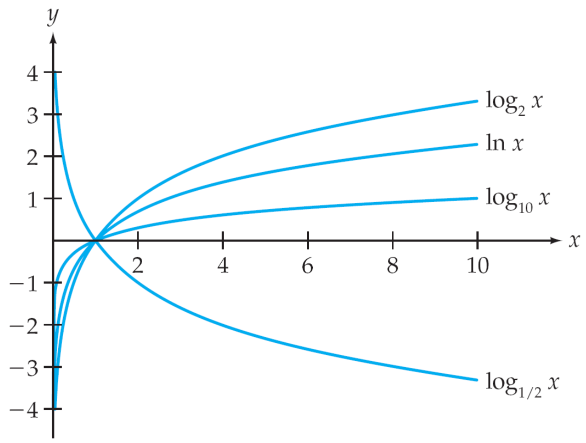
x	$y = \ln x$
0.1	−2.30
0.5	−0.69
1	0
2	0.69
5	1.61
10	2.30
15	2.71



Graph of $y = \ln x$

3. 請注意函數 $\ln x$ 總是遞增，且以 y 軸為垂直漸近線。自然對數函數常被用來數學模型化 (modeling) 持續緩慢成長的現象。

4. 下圖顯示多個不同基底的對數函數圖形。注意每條曲線都會通過(1, 0)這個點，因為 $a^0=1$。我們將專注於討論自然對數函數，因為它是最常被應用在各種問題。



5. 因為對數函數代表的是指數數值，因此指數律中的性質皆可對應到對數函數中。

Properties of Natural Logarithms

1. $\ln 1 = 0$		The natural log of 1 is 0 (since $e^0 = 1$)
2. $\ln e = 1$		The natural log of e is 1 (since $e^1 = e$)
3. $\ln e^x = x$		The natural log of e to a power is just the power (since $e^x = e^x$)
4. $e^{\ln x} = x$	$x > 0$	e raised to the natural log of a number is just the number

※ Example 4 –*USING THE PROPERTIES OF NATURAL LOGARITHMS*

(a). $\ln e^7 =$ __________ (b). $\ln e^{3x} =$ __________

(c). $\ln \sqrt[3]{e^2} =$ __________ (d). $e^{\ln x+5} =$ __________

6. 下列四個性質可以化簡對數函數的乘法、除法、與指數問題，其中 M 與 N 為兩個正數，P 為任意的實數:

Properties of Natural Logarithms	
5. $\ln(M \cdot N) = \ln M + \ln N$	The log of a *product* is the *sum* of the logs
6. $\ln\left(\frac{1}{N}\right) = -\ln N$	The log of 1 *over* a number is the *negative* of the log of the number
7. $\ln\left(\frac{M}{N}\right) = \ln M - \ln N$	The log of a *quotient* is the *difference* of the logs
8. $\ln(M^P) = P \cdot \ln M$	The log of a number to a power is the power *times* the log

※ Example 5 – *USING THE PROPERTIES OF NATURAL LOGARITHMS*

(a). ln (2·3) = ____________________ (b). ln (1/7) = ____________________

(c). ln (2/3) = ____________________ (d). ln $(2)^3$ = ____________________

※ 下列為對數的應用問題 (Applications of Logarithms)

【Topic 3. 在連續複利的情況下倍數本金所需的時間】Doubling Under Compound Interest

1. 要花多久的時間你投資的錢會變成兩倍？

複利：$2P = P \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \rightarrow 2 = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \rightarrow \ln 2 = \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = mt\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)$

$\rightarrow t = \frac{1}{m}\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}$ (請練習推導 但是 不要背!)

連續複利：$2P = P \cdot e^{rt} \rightarrow 2P = P \cdot e^{rt} \rightarrow 2 = e^{rt} \rightarrow rt = \ln 2 \rightarrow t = \frac{1}{r}\ln 2$

2. 在解這樣的問題通常會使用到此性質：ln $(M^P) = P \cdot \ln M$ (指數的指數：指數相乘)。

※ Example 9 – *FINDING DOUBLING TIME*

A sum is invested at 12% interest compounded quarterly. How soon will it double in value?

<Sol>: We use the formula ________________ with r = ________ and m = ________. Since double P dollars is $2P$ dollars, we want to solve

$$2P = P \cdot \left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4t} \rightarrow 2 = (1.03)^{4t} \rightarrow \ln 2 = \ln(1.03)^{4t} = 4t\ln 1.03 \rightarrow t = \frac{\ln 2}{4\ln(1.03)} \approx 5.9$$

A sum at 12% compounded quarterly doubles in about 5.9 years.

【Topic 4. 藥物劑量】Drug Dosage

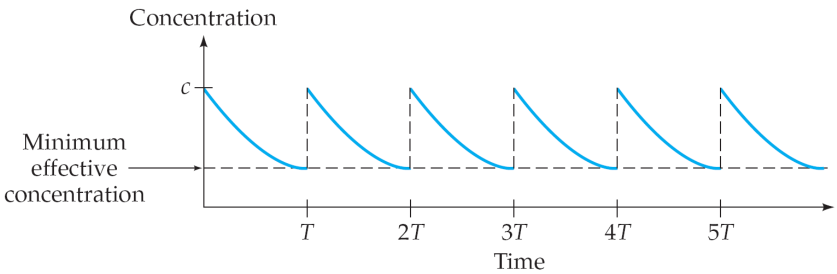
1. 藥物在人體血液中的剩餘量隨著時間呈指數遞減。假設血液中初始藥物濃度(initial concentration)為 c (milligrams per milliliter of blood)，經過 t 小時後血液中藥物濃度將變成

$$C(t) = ce^{-kt}$$

其中 k 為吸收常數 (absorption constant)，代表藥物快被人體吸收快慢的常數。

2. 每種藥物都有最低有效濃度 (minimum effective concentration). 當人體中藥物濃度低於這個水平，就需要再對人體供應藥物。如果每隔 T 小時穩定供應藥物，藥物濃度的圖形如下圖所示。

3. 藥物劑量問題為如何決定供應藥物的週期時間 T 值以維持體內最低有效濃度。



Drug concentration with repeated doses

※ Example 11 – *CALCULATING DRUG DOSAGE*

The absorption constant for penicillin (盤尼西靈) is k = 0.11, and the minimum effective concentration is 2 milligrams. If the original concentration is c = 5 milligrams, find when another dose should be administered in order to maintain an effective concentration.

<solution>：The concentration formula ______________ with c = ________ and k = ________ is

_____________________. To find the time when this concentration reaches the minimum effective level of 2, we solve $5e^{-0.11t} = 2$ (解答為: $t = \dfrac{\ln 0.4}{-0.11} \approx \dfrac{-0.9163}{-0.11} \approx 8.3$)

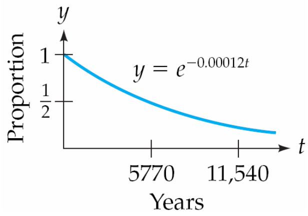
The concentration will reach the minimum effective level in 8.3 hours, so another dose should be taken approximately every 8 hours.

【Topic 5. 同位素碳 14 鑑定年代】Carbon 14 Dating

1. 所有活著的生物都會吸收大氣中少量的放射性元素碳 C-14。當這些生物死後，C-14 就會停止被吸收並且呈指數衰退成一般的碳 C-12。因此化石(fossil)或古物(ancient remain)中殘存的 C-14 含量可用來鑑定這個物品的年代。

2. t 年後殘存的 C-14 與原始的 C-14 比例為：

$$\begin{pmatrix}\text{Proportion of carbon 14}\\ \text{remaining after } t \text{ years}\end{pmatrix} = e^{-0.00012t}$$



※ Example 12 – *DATING BY CARBON 14*

The Dead Sea Scrolls, discovered in a cave (洞穴) near the Dead Sea in what was then Jordan (約旦) , are among the earliest documents of Western civilization. Estimate the age of the Dead Sea Scrolls if the animal skins on which some were written contain 78% of their original carbon 14.

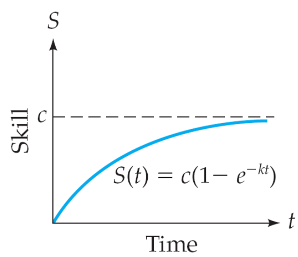
Solution: $t = \dfrac{\ln 0.78}{-0.00012} \approx \dfrac{-0.24846}{-0.00012} \approx 2071$ approximately 2070 years old.

【Topic 6. 行為科學：學習理論】Behavioral Science: Learning Theory

1. 一項工作的能力可透過不斷練習來改進。一般來說，在練習了個單位 t 個單位(時間)後，工作技巧可表示成時間函數：

$$S(t) = c(1-e^{-kt})$$

其中 c 與 k 都是正的常數。

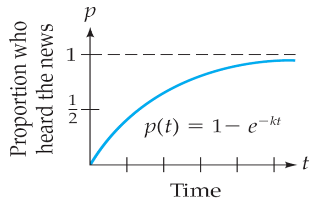


※ Example 13–*ESTIMATING LEARNING TIME*

After t weeks of training, your secretary can type $S(t) = 100(1-e^{-0.25t})$ words per minute. How many weeks will he take to reach 80 words per minute?

Solution: $t = \dfrac{\ln 0.20}{-0.25} \approx \dfrac{-1.6094}{-0.25} \approx 6.4$ about 6.5 weeks

【Topic 7. 社會科學：資訊散佈】Social Science: Diffusion of Information by Mass Media



當一個新聞快報重複地透過廣播或電視播出，在 t 小時內聽過這則新聞快報的人口比例為 $p(t) = 1 - e^{-kt}$, 其中 k 為常數。

※ Example 14 – *PREDICTING THE SPREAD OF INFORMATION*

A storm warning is broadcast, and the proportion of people who hear the bulletin within t hours of its first broadcast is $p(t) = 1 - e^{-0.30t}$. When will 75% of the people have heard the bulletin?

Solution:

Equating the proportions gives $1 - e^{-0.30t} = 0.75$. Solving this equation gives $t \approx 4.6$.

Therefore, it takes about 4.6 hours for 75% of the people to hear the news.

Section 4.3 Differentiation of Logarithmic and Exponential Functions 指數對數函數微分

【Topic 1. 對數函數的導數】Derivatives of Logarithmic Functions

1. 自然對數(natural logarithm)函數的微分規則如下： [請熟記]

Derivative of $\ln x$	
$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$	The derivative of $\ln x$ is 1 over x

證明： (詳見 section 4.3 附錄)

$$\frac{d}{dx}\ln x=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

Let $n=\dfrac{x}{h}$, when h approach zero, n approach infinite.

$$\text{原式}=\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)\ln(e)=\frac{1}{x}.$$

※ Example 1–*DIFFERENTIATING A LOGARITHMIC FUNCTION*

a. Differentiate $f(x)=x^3\ln x$.

b. Differentiate $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

2. 前述的微分規則配合上連鎖律，一個函數的自然對數微分如下，其中可微函數 $f(x)$ 為正：

Derivative of $\ln f(x)$	
$\dfrac{d}{dx}\ln f(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	The derivative of the natural log of a function is the derivative of the function over the function

※ Example 2–*DIFFERENTIATING A LOGARITHMIC FUNCTION*

a. Find $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x^2+1\right)$

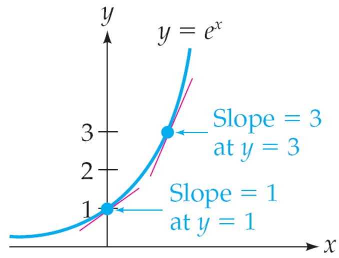
b. Find $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x^3-5x+1\right)$

【Topic 2. 指數函數的導數】Derivatives of Exponential Functions

1. 指數函數 e^x 的微分規則如下： [請熟記]

Derivative of e^x

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$ The derivative of e^x is simply e^x



For $y = e^x$, $y' = y$.

這個函數的微分後其結果不變。

2. 上述的規則可以用圖形解釋：如果 $y = e^x$，則 $y' = e^x$，即 $y = y'$. 這代表圖形 $y = e^x$ 在某一點的斜率與它的 y 座標相等。同時因為 $y' = y'' = e^x$，因此 $y = e^x$ 的函數圖形永遠是遞增 (因為 $y' > 0$)且凹口向上 (concave upwards) (因為 $y'' > 0$)。

※ Example 4 and 5–*FINDING A DERIVATIVE INVOLVING* e^x

#4. If $f(x) = e^x / x$, find $f'(x)$. #5. If $f(x) = x^2 e^x$, find $f'(1)$.

3. 前述的微分規則配合上連鎖律，一個函數 $f(x)$ 的自然指數 $e^{f(x)}$ 微分如下：

Derivative of $e^{f(x)}$

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$ The derivative of e to a function is e to the function times the derivative of the function

對 $e^{f(x)}$微分等於「該函數自己」乘上它的「指數函數微分」。

※ Example 6 – *DIFFERENTIATING AN EXPONENTIAL FUNCTION*

Find $\dfrac{d}{dx}e^{x^4+1}$

4. 對指數與對數函數的微分公式整理如下，其中 $f(x)$ 簡寫成 f。

Logarithmic Formulas	*Exponential Formulas*	
$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$	Top formulas apply only to ln x and e^x
$\dfrac{d}{dx}\ln f = \dfrac{f'}{f}$	$\dfrac{d}{dx}e^f = e^f \cdot f'$	Bottom formulas apply to ln and e of a *function*

※ Example 8–*DIFFERENTIATING A LOGARITHMIC AND EXPONENTIAL FUNCTION*

Find the derivative of $\ln(1+e^x)$.

5. 下列公式說明 e^{kx} 的改變率(導函數之意) 正比於它自己。

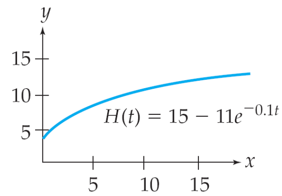
Derivative of e^{kx}

$$\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx} \qquad \text{For any constant } k$$

6. 即這個函數滿足下列的微分方程 $y' = ky$。稍早就有提過這點，指數成長的量會正比於指數它自己。這些微分公式讓我們能找出指數對數函數的瞬間改變率。對許多的應用而言，自變數為時間，我們可用 t 取代 x。

※ Example 9–*FINDING A RATE OF IMPROVEMENT OF A SKILL*

After t weeks of practice a pole vaulter (撐竿跳選手) can vault $H(t) = 15-11e^{-0.1t}$ feet. Find the rate of change of the athlete's jumps after



a. 0 weeks (at the beginning of training)

b. 12 weeks. Hint: $e^{-1.2} \approx 0.30$.

This result is typical of learning a new skill: early improvement is rapid, later improvement is slower. This trend is called *diminishing returns,* and may be seen in the leveling off of the pole vault heights in the graph below.

【Topic 3. 最大化消費者開支】Maximizing Consumer Expenditure

1. 消費者會購買某一商品 (commodity) 的數量取決於該商品的價格。對一個商品而言，價格為 p 時，其需求函數為 $D(p)$。將某項商品的數量乘上價格即為消費者開支 (或消費量：*consumer expenditure*)

Consumer Demand and Expenditure

Let $D(p)$ be the consumer demand at price p. Then the consumer expenditure is

$$E(p) = p \cdot D(p)$$

※ Example 10–*MAXIMIZING CONSUMER EXPENDITURE*

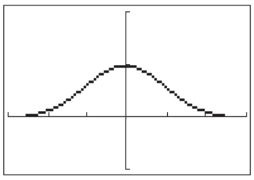
If consumer demand for a commodity (商品) is $D(p) = 10{,}000e^{-0.02p}$ units per week, where p is the selling price, find the price that **maximizes** consumer expenditure. Hint: maximumize $p \cdot D(p)$.

【Topic 4. 指數與對數函數繪圖】Graphing Logarithmic and Exponential Functions

1. 使用一個圖形計算機來繪製指數與對數函數圖形，首先要找出所有的臨界點與反曲點，且將此函數選定一個視窗大小當中包含這些點。如果使用手繪圖形，我們會求出一、二階導函數並畫出正負號表 (sign diagrams) 來決定函數的遞增遞減以及凹性。

2. Example 11–*GRAPHING AN EXPONENTIAL FUNCTION*

   Graph $f(x) = e^{-x^2/2}$



$f(x) = e^{-x^2/2}$ on $[-3, 3]$ by $[-1, 2]$

Section 4.4 Two Applications to Economics: relative rates and elasticity of demand

兩個經濟上的應用：「相關變率」與「需求的彈性」

本章我們會定義何謂「相關變率」(**relative rates of change**)以及經濟學上如何使用。稍後我們會定義一個經濟學上一個重要的觀念：「需求的彈性」(**elasticity of demand**)。

【Topic 1. 絕對與相對變率】Relative Versus Absolute Rates

1. 函數的導函數為該函數的相關變率 (rate of change)。舉例說明，如果 $f(t)$ 為一雙鞋子在第 t 年的成本 (cost)，則 $f'(t)$ 為成本的改變率 (美元/每年)。即 $f' = 3$ 代表鞋子的成本改變率為年增 3 美元。同樣地，如果 $g(t)$ 為一台新車在第 t 年的價格，則 $g'(t)$ 為價格的改變率 (美元/每年)。即 $g' = 300$ 代表汽車的價格改變率為年增 300 美元。

2. 上面鞋子與汽車的例子，是否代表汽車的價格改變率為鞋子成本的一百倍？以絕對改變率而言，上述答案為肯定的。無論如何，這樣並沒有考慮到鞋子與汽車之間龐大的 (enormous) 價差 (price difference)。

【Topic 2. 相對變率】Relative Rates of Change

1. 若 $f(t)$ 為一件商品在時間 t 時的價格，則 $f'(t)$ 為絕對變率 (absolute rate of change)，同時相對變率 (relative rate of change)為 $f'(t)/f(t)$，即「相對變率」等於「絕對變率」除以「價格函數」。一般而言，相對變率的意義會大於絕對變率。例如，國內生產總值 (gross domestic product) 的相對變率為每年 3% (年成長率 3%)，一定會比每年絕對變率每年 \$400,000,000,000 (年增加率 4 千億美元) 還容易理解。

2. 「相對變率」的表示式 $f'(x)/f(x)$ 其實就是「自然對數函數」的微分型式：

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

因此這也提供了「相對變率」的另一種表示法：使用自然對數函數的微分。

Relative Rate of Change

$$\begin{pmatrix}\text{Relative rate of}\\ \text{change of } f(t)\end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

For a differentiable function $f > 0$

變數 t 通常代表時間。上列的兩個公式會得到相同的結果。等號中間的表示法通常稱為「對數函數的導數」(*logarithmic derivative*)。

3. 因為「相對變率」是一個**比值**或**百分比**，它**不會依賴函數的單位**。因此相對變率可用來比較不同的商品，甚至是不同的國家。這與「絕對變率」形成對比，「絕對變率」會依賴函數的單位，例如第 1 點的例子，相對變率為年成長率 3%，與絕對變率為年增加率 4 千億美元。

※ Example 1–*FINDING A RELATIVE RATE OF CHANGE*

If the gross domestic product t years from now is predicted to be $G(t) = 8.2e^{\sqrt{t}}$ trillion dollars, find the relative rate of change 25 years from now. [Hint (1) $\dfrac{d}{dt}\ln G(t)$ or (2) $\dfrac{G'(t)}{G(t)}$ 答案是 0.10]

【Topic 3. 需求的彈性】Elasticity of Demand

1. 農夫通常都知道一件矛盾的事：豐收 (abundant harvest) 時候的總收入(*lower* total revenue) 經常比欠收 (poor harvest) 時候的總收入來得少。這個理由很簡單，因為豐收時農作物數量較多，因此價格較低，它會造成需求的增加，然而需求增加的量不足以彌補價格的損失。

2. 收益為價格乘以數量，即 $R = price * quantities$, 當一個變數上升時，另一個就下降。問題在於是否上升的那個部份能夠彌補下降的另一個。舉例說明，假設價格下降 1% 可以帶來 2% 數量的增加，則總收入會增加 [0.99*1.02 = 1.0098 > 1]。但如果價格下降 1% 只能帶來 0.5% 數量的增加，則總收入會減少 [0.99*1.005 = 0.99495 < 1]。因此「需求的彈性」這個觀念被發明用來分析這種問題。

3. 概略的說，我們可以將「需求的彈性」想像成「需求的改變比例」除以「價格的改變比例」:

Understanding Elasticity of Demand

$$E = \frac{\text{Percent change in demand}}{\text{Percent change in price}}$$

Brief Examples

If a 1% change in price brings a 2% change in demand: $E = \dfrac{2\%}{1\%} = 2$

If a 1% change in price brings only a $\frac{1}{2}$% change in demand: $E = \dfrac{\frac{1}{2}\%}{1\%} = \dfrac{1}{2}$

4. 我們依照「需求的彈性」E，將需求分類成有彈性的(*elastic*)與不具有彈性的(*inelastic*)。若 $E > 1$，則稱為具有彈性(*elastic*)；若 $E < 1$，則稱為不具有彈性(*inelastic*)；

Demand is *elastic* if $E > 1$
Demand is *inelastic* if $E < 1$
Demand is *unit-elastic* if $E = 1$

第 2 點中的第一個例子 $E = 2$，因此是需求是彈性的(*elastic*)，第二個例子為 $E = 1/2$，因此是需求是沒有彈性的(*inelastic*)。

5. 直觀地，我們可以將「需求的彈性」想像成需求對價格改變的回應：「有彈性的需求」(*elastic*)代表需求對價格有反應(*responsive*)，「沒有彈性的需求」(*inelastic*)代表需求對價格有沒有反應(*unresponsive*)。對「有彈性的需求」(*elastic*)而言，當價格下降時會帶來需求大量增加，因此總收入會增加。另一方面，對「沒有彈性的需求」(*inelastic*)而言，當價格下降時會僅帶來很少量的需求增加，因此總收入會減少。

經濟學者會對許多商品計算它們的「需求的彈性」，某些典型商品的「需求的彈性」如右表所示。右表中顯示：生活必需品 (*necessities*) 如衣服與食物等等，是不具有「需求的彈性」，因為就算價格上揚，消費者仍需要他們。但是其它奢侈品 (luxuries) 如餐聽的餐點或汽車等等，需求是彈性，因為消費者刪除或是找出其它替代品以反應價格的上揚。

Good or Service	Elasticity
Clothing	0.20
Housing	0.30
Gasoline	0.43
Movies	0.87
Automobiles	1.87
Restaurant meals	2.27
Fresh fruit	3.02

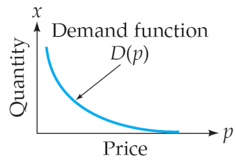
Source: Houthaker and Taylor, *Consumer Demand in the United States, Review of Economics and Statistics*, **62**

Demand Function

The demand function

$$x = D(p)$$

gives the quantity x of an item that will be demanded by consumers if the price is p.



Law of downward-sloping demand

6. 一般而言，當價格上揚時，需求會減少，因此需求函數的斜率總是負的 (遞減)，如右圖所示。這個圖形又稱為由左至右向下延伸的需求定律 (the *law of downward sloping demand*)。

【Topic 4. 計算需求彈性】Calculating Elasticity of Demand

Elasticity of Demand

For a demand function $D(p)$, the elasticity of demand is

$$E(p) = \frac{-p \cdot D'(p)}{D(p)}$$

Demand is *elastic* if $E(p) > 1$ and *inelastic* if $E(p) < 1$.

因為彈性 (Elasticity) 是由「相對變率」所組成，**不會依賴需求函數的單位**。因此彈性也可用來比較不同的商品，甚至是不同的國家。

※ Example 2–*FINDING ELASTICITY OF DEMAND FOR COMMUTER BUS SERVICE*

A bus line estimates the demand function for its daily commuter tickets to be $D(p) = 81 - p^2$ (in thousands of tickets), where p is the price in dollars ($0 \le p \le 9$). Find the elasticity of demand when the price is: **a**. \$3 **b**. \$6

a. *Interpretation:* The elasticity is less than 1, so demand for tickets is ***inelastic*** at a price of \$3.This means that a small price change (up or down from this level) will cause only a ***slight* change** in demand. More precisely, **elasticity of 1/4 means that a 1% price change will cause only about a (1/4)% change in demand.**

b. *Interpretation:* The elasticity is greater than 1, so demand is ***elastic*** at a price of \$6. This means that a small change in price (up or down from this level) will cause a r**elatively *large* change in demand**. In particular, **an elasticity of 1.6 means that a price change of 1% will cause about a 1.6% change in demand.**

【Topic 5.】Using Elasticity to Increase Revenue

在例題 2 中我們發現，當票價為 \$3 時，需求是不具有彈性的，因此價格的改變只會對需求產生輕微的影響。因此要增加收入則公司應該提高售價，因為高一點的價格只會流失少量的客源。

另一方面，當票價為 \$6 時，需求是具有彈性的，因此價格的改變會對需求產生明顯的影響。因此要增加收入則公司應該降低售價，因為低一點的價格只會吸引更多量的客源。

一般而言，依需求彈性訂定售價策略以增加收入的準則如下：

Elasticity and Revenue

To increase revenue:

If demand is elastic $(E > 1)$, you should *lower* prices.
If demand is inelastic $(E < 1)$, you should *raise* prices.

上面的敘述說明了為何「需求的彈性」是如此的重要，對任何公司想要降價以提高收益，或是任何公民營團體想要提高售價以提升收益。彈性會顯示策略會成功還是失敗。界限的狀態是當 $E = 1$ (又稱為彈性單位 *unit-elasticity*) 是當收益無法再提升，也就代表收益已最大化。因此當收益最大化時，彈性值必需為 1。

At maximum revenue, elasticity of demand must equal 1.

我們可以使用這個因素當成一個最大化收益的一個基本準則，但我們還是會使用稍早所介紹過的臨界數來解收益最大化的問題。