Section 5.1 Antiderivatives and indefinite integrals 反導函數與不定積分

上一章我們已經學過微分以及它的應用。現在我們考慮反向的過程，稱為積分(***anti*differentiation**)，給定一個導函數，找出它原始的函數。積分也有許多的應用，例如，微分將一個 cost function 轉變成 marginal cost function，因此積分會將 marginal cost function 轉變成 cost function。稍後我們會使用積分做其它用途，如找出面積等等。

【Topic 1. 反導函數與不定積分】Antiderivatives and Indefinite Integrals

1. 我們開使用一個簡單的例子來解釋積分。因為 x^2 的導函數為 $2x$，因此 $2x$ 的反導函數(*anti*derivative)為 x^2:

   An antiderivative of $2x$ is x^2 Since the derivative of x^2 is $2x$

   無論如何，$2x$ 還有其的反導函數。下列每一個函數都是 $2x$ 的反導函數:

   x^2+1 x^2-17 x^2+e Since the derivative of each is $2x$

   很明顯地，我們可加上任何常數到 x^2 且微分結果仍為 $2x$。因此對任意常數 C 而言，x^2+C 都是 $2x$ 的反導函數。同時，它也可以被證明出 $2x$ 沒有其它的導函數。因此 $2x$ 最一般化的反導函數 (*most general* antiderivative) 為 x^2+C。

2. $2x$ 一般化的反導函數稱為 $2x$ 的不定積分 (**indefinite integral**)，並將 2x 寫在積分符號 (**integral sign** $\int$) 與 ***dx*** 中間**:**

   $$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

   上式中的 $2x$ 稱為被積分函數 (**integrand).** dx 提醒我們積分的變數為 x。C 稱任意的常數 (**arbitrary constant**)，因為它的值可以為任意的數值，正數、負數、或零。

3. 一個不定積分(簡稱積分)可以藉由檢查答案 (x^2+C) 的微分是否與被積分函數 $(2x)$ 相同。

Indefinite Integral

$\int f(x)\,dx = g(x) + C$ The integral of $f(x)$ is $g(x)+C$

if and only if

$g'(x) = f(x)$ The derivative of $g(x)$ is $f(x)$

【Topic 2. 積分規則】Integration Rules

1. 有許多的規則可以用來簡化積分。首先，在微積分裡最常被使用的，即為 x 常數次方函數的積分。它來自於指數微分規則 (Power Rule for differentiation) 的反向思考。換言之，要對一個 x 常數次方函數做積分，其結果為 x 的指數值加 **1**，並除以新的指數值。(請排除常數次方為**–1** 的狀況，因為它要用 $\ln x$ 來做)

Power Rule for Integration

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

Brief Example

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

※ 例 1 與例 3. 找出下列積分：(a). $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ (b). $\int 1\,dx$.

下列這個結果是很有用而且需要被記起來的

$$\int 1\,dx = x + C$$ The integral of 1 is $x + C$

2. 在微分裡面所擁有的「常數乘法」與「加法規則」都有可對應的簡化積分規則。第一個規則為「加法規則」，它說明了「兩個函數相加後做積分」等於「個別做積分後再相加」。

Sum Rule for Integration

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$ The integral of a sum is the sum of the integrals

「加法規則」可以擴展到積分任意多個函數做加法或減法，同時只要在最後的地方寫一個 $+C$ 即可 (因為可以把每個不定積分的常數全部加在一起)。

※ Example 5. Find (a). $\int (x^2 + x^3)\,dx$. (b). $\int (x^2 - x^{-3} + x^{-5})\,dx$

3. 第二個規則為「常數乘法規則」，它說明了被積分函數的常數 k 可以被提到積分符號之外。

Constant Multiple Rule for Integration

For any constant k,

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$ The integral of a constant times a function is the constant times the integral of the function

※ Example 6. Find (a). $\int 6x^2\,dx$. (b). $\int 2\cdot\left(x^3 + 3x + 5\right)dx$.

4. 下列為一個非常有用的一般性規則。對任意常數 k，

Integral of a Constant

$$\int k\,dx = kx + C$$ The integral of a constant is the constant times x (plus C)

【Topic 3. 積分的代數化簡】Algebraic Simplification of Integrals

1. 有些時候一個被積分函數 (integrand) 必需要先乘開或是改寫成其它型式才能積分。

※ Example 11. Find $\int x^2(x+6)^2\,dx$.

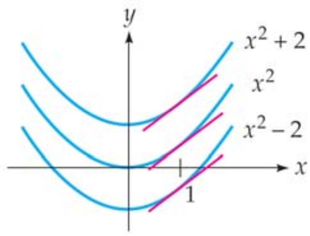
※ Example 12–*RECOVERING COST FROM MARGINAL COST*： A company's marginal cost function is $MC(x) = 6\sqrt{x}$ and the fixed cost is \$1000. Find the cost function.

2. 我們找 cost function 可用下列兩個步驟： 積分 marginal cost 之後計算其任意常數值，如下所示。

> 1. Integrate the *marginal* or *rate of change*.
> 2. Use the given fixed value to evaluate the arbitrary constant.

【Topic 4. 任意常數的幾何意義】Geometrical Interpretation of the Arbitrary constant

1. 請注意在不定積分中，$+C$ 這個任意常數可被解釋為幾何的平移。如例題 12，在 $\int 2x\,dx = x^2 + C$ 所代表的是一個集合，每一個不同的 C 值構成一條曲線，不定積分的結果為一個曲線的集合。
2. 右圖所示的三條曲線分別為 x^2+2、x^2、與 x^2-2 三條曲線，對應到的 C 值分別為 2、0、與–2。實際上，三條曲線在任意一個 x 值所對應到的斜率都相同，這是因為它們微分的結果都是 $2x$，即斜率相等。因此任意常數的幾何意義解釋如下：不定積分的結果為一個集合，集合中「所有的曲線都平行」，且對任意一個 x 值，每條曲線所對應到的斜率都相同。



$y = x^2 + C$ with tangent lines at $x = 1$

【Topic 5. 積分如同連續的和】Integrals as Continuous Sums

1. 我們已經見過微分，像是把 total cost 分解成許多的 marginal cost。積分，就像反向處理，把眾多的 marginal cost 逐漸累加，可得到反導函數 total cost。
2. 舉例說明，原始的加法是一塊一塊的相加，如 \$2 + \$3 = \$5。然而，積分像是累加連續的改變，像隨著時間改變而緩慢但持續成長的經濟行為等等。換言之：

> Integration is continuous summation.

Section 5.2 Integration using Logarithmic Exponential Functions 指數對數函數積分

【Topic 1. $\int e^{ax}dx$ 積分】The Integral $\int e^{ax}dx$

1. 我們知道對 e^{ax} 微分，結果為「指數本身」乘上「常數 a」，即 ae^{ax}。因此要對 e^{ax} 積分，如同微分的反向程序，結果為「指數本身」除以「常數 a」。對任意常數 $a \neq 0$：

Integrating an Exponential Function

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

Brief Example

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

※ Example 1. Find (a). $\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx$. (b). $\int 6e^{-3x}\,dx$ (c). $\int e^{x}\,dx$

例題 1 中這些答案可以使用微分來檢驗結果的正確性。最後一個例子說明了 e^x 的積分為 e^x 本身，如同 e^x 的微分為 e^x 本身。

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$ The integral of e^x is e^x (plus C)

【Topic 2. 計算不定積分常數值 C】Evaluating the Constant C

1. 將題目所描述的初始條件 (initial value) 代入積分的結果之中。
2. 解常數 C 的一元一次方程式。
3. 將積分結果中的 C 以它的正確值取代。

To evaluate the constant C:
1. Evaluate the integral at the given number (usually $t = 0$) and set the result equal to the stated initial value.
2. Solve for C.
3. Write the answer with C replaced by its correct value.

【Topic 3. x^{-1} 的積分】The Integral $\int \frac{1}{x}dx$

1. 微分公式 $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ 可以被反向解讀成積分公式：$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$，其中 **$x > 0$，因為對數函數的定義域為 $(0, \infty)$**。對於 $x < 0$ 而言，對 $\ln(-x)$ 微分可得 $\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ (since $\frac{d}{dx}\ln\big(f(x)\big) = \frac{f'(x)}{f(x)}$)。因此對 $x < 0$ 的數值，$1/x$ 的積分結果為 $\ln(-x)$。請注意 $\ln(-x)$當中的負號只是為了讓負數轉正。所以我們可以使用下列公式來代替：$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$，這個公式對正或負的 x 值皆成立，因為絕對值會使 $|x|$ 恆正。

2. 下列三種積分的寫法不同，但意義相同，都有相同的答案。

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$

※ Example 3 – *INTEGRATING USING THE LN RULE*

Find $\int \frac{5}{2x}\,dx$

【Topic 4. 自然資源消耗】Consumption of Natural Resources

1. 世界人口呈現指數的成長，因此世界每年消耗自然資源也呈指數的成長。我門可以透過對消耗率(rate of consumption) 做積分來估計由現在到未來任一時間點之間的總消耗量，由此可預測自然資源的蘊藏量 (reserves) 何時會消耗殆盡 (exhausted)。
2. ※ Example 6–*FINDING A FORMULA FOR TOTAL CONSUMPTION FROM THE RATE*

The annual world consumption of tin (錫，馬口鐵) is predicted to be $0.26e^{0.01t}$ million metric tons per year, where t is the number of years since 2008. Find a formula for the total tin consumption within t years of 2008 and estimate when the known world reserves of 6.1 million metric tons will be exhausted. *Source:* U.S. Geological Survey. [Hint $t \approx \frac{\ln 1.235}{0.01} = 21.1$]

【Topic 5. 積分的指數規則 (續)】Power Rule for Integration, Revisited

1. 新的積分展示如何對 x^{-1} 做積分，它是唯一的 x 指數函數但不被指數規則所包含。因此我們可以合併上述兩種公式，成為一個 x 的任意次方的積分：

Integrals of Powers of x

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C & \text{if } n \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{if } n = -1 \end{cases}$$

Use the Power Rule if n is *other* than -1

Use the ln formula if n equals -1

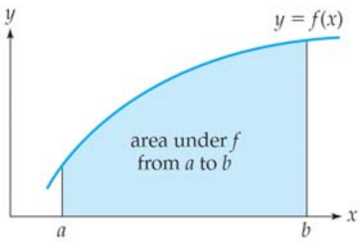
有趣的事實為，每一個 x 的指數函數積分結果都會成為另一個 x 的指數函數，除了 x^{-1} 之外，它的結果為一個 x 的自然對數函數 $\ln|x|$。

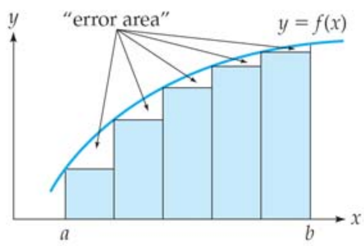
Section 5.3 Definite integrals and areas 定積分與面積

本章首先討論如何計算曲線下的面積，同時定義函數的定積分。接著「微積分積本定理」(**Fundamental Theorem of Integral Calculus**) 會提供更簡單的方式使用不定積分來計算定積分。最後我們會看到多種定積分的應用。

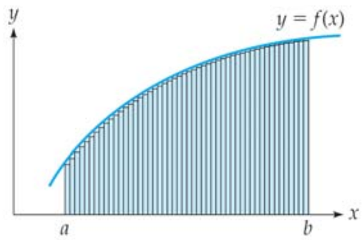
【Topic 1.曲線下方面積】Area Under a Curve

1. 下圖左方為一個連續的非負函數。若我們想要計算曲線之下、x 軸之上、為於垂直線 $x=a$ 與 $x=b$ 之間的面積 (簡稱曲線下面積)。我們可以使用多個矩形(或說長方形: rectangle)來逼近這塊區域。如右下圖所示，這五塊矩形的底 (base) 都一樣，每塊矩形的高 (height) 分別為左邊的邊長，這些又稱為左矩形 (*left* rectangles)。





2. 無論如何，這五個矩形無法對曲線下方的面積提供精確的近似值。上圖右方白色的區域即為面積誤差值 (error area)。如右圖所示，當我們使用五十個矩形來逼近曲線下方的面積時，可以得到一個較佳的近似。如下圖所示，曲線與矩形中間的區域是非常小，小到幾乎是看不見的狀態。
3. 右圖告訴我們當更多的矩形用來逼近曲線下的面積，其值越精準。實際上，曲線下方的面積正好是當曲線下方的矩形數量有無限多個的時候。

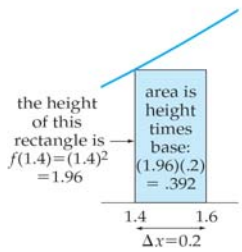


Area under f from a to b
approximated by 50 rectangles

※ Example 1 – *APPROXIMATING AREA BY RECTANGLES*

Approximate the area under the curve $f(x)=x^2$ from 1 to 2 by five rectangles. Use rectangles with equal bases and with heights equal to the height of the curve at the left-hand edge of the rectangles. (Ans: approximate 2.04 square units)

Sol: (1). 找出 base：由 a 到 b 分成 n 等份，每一份寬度 $(\Delta x)=$ ____________________。



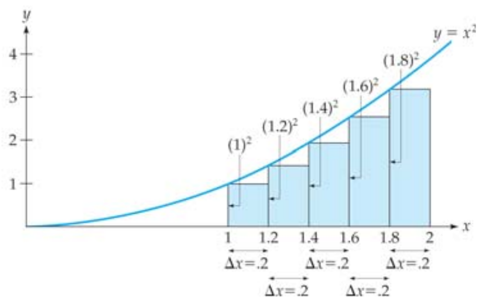
(2). 找出左邊界的高：假設左邊界所在的五個點的 x 值分別為 $x_1 \sim x_5$，其中 $x_1=1.0=a$，$x_2=x_1+(2-1)\Delta x=a+\Delta x=1.2$，$x_3=x_1+(3-1)\Delta x=a+2\Delta x=1.4$，$x_4=x_1+(4-1)\Delta x=a+3\Delta x=1.6$，$x_5=x_1+(5-1)\Delta x=a+4\Delta x=1.8$.

因此五個左邊界的高分別為

$f(x_1)=f(1.0)=1$ $\qquad f(x_2)=f(1.2)=1.44$

$f(x_3)=f(1.4)=1.96$ $\qquad f(x_4)=f(1.6)=2.56$

$f(x_5)=f(1.8)=3.24$



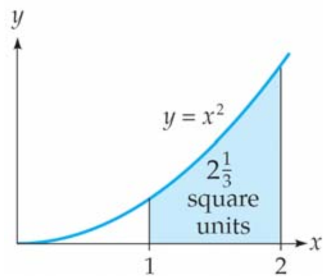
面積 $A=\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\cdot \Delta x = 0.2\cdot[1+1.44+1.96+2.56+3.24]=0.2*10.2=2.04$

如同先前提過的，只使用五個矩形來逼近曲線下面積是不夠精確的。為了提高精確性，我們用相同的方法，但使用更多的矩形來計算曲線下面積，下表為矩形個數與矩形總面積列表。我們可以發現 $f(x)=x^2$ 在 x 由 1 到 2 下的面積會逼近 7/3 平方單位，如右下圖所示。

Number of Rectangles	Sum of Areas of Rectangles
5	2.04
10	2.185
100	2.318
1000	2.332
10,000	2.333

← Found in Example 1

The sum of the areas is approaching $2\frac{1}{3}$



練習題：p. 361 #9 Approximate the area under the curve $f(x) = \sqrt{x}$ from 1 to 4 by six rectangles with equal bases and with heights equal to the height of the curve at the right-hand edge of the rectangles. Write the answer approximate the area by 1000 rectangles with sigma sign.

【Topic 2. 定積分】Definite Integral

1. 一個非負函數 f 曲線下面積可由 n 個矩形來逼近，其一般化程序如下：

Area Under f from a to b Approximated by n Left Rectangles

1. Calculate the rectangle width $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
2. Find x-values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ by successive additions of Δx beginning with $x_1 = a$.
3. Calculate the sum:

$$f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x$$

上述步驟 3 的總和稱為黎曼和 (**Riemann sum**)。.

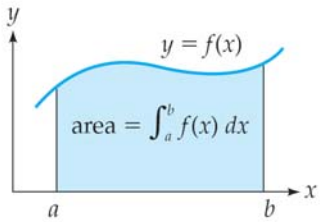
2. 當黎曼和中的 n 值趨近於無限大 (由無限多個矩形來逼近)，其極限值相當於曲線下的面積，稱為函數 **f** 由 **a** 到 **b** 的定積分，寫成 $\int_a^b f(x)\,dx$. 正式定義如下：

Definite Integral

Let f be a continuous function on an interval $[a, b]$. The definite integral of f from a to b is defined as

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty}\left[f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x\right]$$

where $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, and $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are x-values beginning with $x_1 = a$ and obtained by successive additions of Δx. If f is nonnegative on $[a, b]$, then the definite integral gives the *area under the curve from a to b.*



數值 **a** 與 **b** 稱為定積分的下界與上界 (the **lower** and **upper limits of integration**)。

【Topic 3. 微積分基本定理】Fundamental Theorem of Integral Calculus

1. 一個函數後面接著一條垂直線$\Big|_a^b$，並標示下界與上界 a 與 b，其值相當於上界的函數值減去下界的函數值。

$$F(x)\Big|_a^b = \underbrace{F(b)}_{\text{Evaluation at upper number}} - \underbrace{F(a)}_{\text{Evaluation at lower number}}$$

※ Example 2 – *USING THE EVALUATION NOTATION*

Evaluate $x^2\Big|_3^5$.

2. 下列的微積分基本定理 (**Fundamental Theorem of Integral Calculus**) 指出如何使用「不定積分」(indefinite integrals) 來計算「定積分」(definite integrals)。

Fundamental Theorem of Integral Calculus

For a continuous function f on an interval $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

The right-hand side may be written $F(x)\Big|_a^b$

where F is any antiderivative of f.

上述的定理連接起「定積分」(黎曼和的極限值) 與「反導函數」(antiderivatives) 之間的基本關係。它說明了一個定積分可使用下面兩個簡單的步驟來計算：

(1). 找出函數的不定積分 (或稱反導函數) (可忽略 $+C$)

(2). 計算反導函數的上界減去下界的值。

※ Example 3 – *FINDING A DEFINITE INTEGRAL BY THE FUNDAMENTAL THEOREM*

Find $\int_1^2 x^2\,dx$.

3. 定積分有許多性質與不定積分是相同的。這些性質將定積分解釋成黎曼和的極限值。其中第一式代表函數值變成 c 倍，矩形的高度也變成 c 倍，因此面積的總合也會變成 c 倍。第二式代表兩個函數值相加(減)，矩形的高度也變成函數值相加(減)，因此面積的總合也會變成兩個函數值相加(減)。

Properties of Definite Integrals

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

A constant may be moved across the integral sign

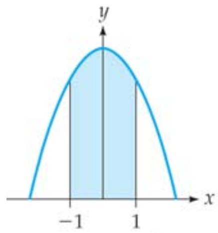
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Read both upper signs or both lower signs

The integral of a sum is the sum of the integrals (and similarly for differences)

※ Example 6 – *USING THE PROPERTIES OF DEFINITE INTEGRALS*

Find the area under $y = 24–6x^2$ from –1 to 1.



$y = 24 - 6x^2$ is nonnegative on $[-1, 1]$

【Topic 4. 連續單位的總成本】Total Cost of a Succession of Units

1. 給定一個邊際成本 (marginal cost) 函數，找出一個「數量區間」內的總成本 (*total* cost)，例如，製造 100 到 400 個單位的總成本。我們處理方式如下：先對邊際成本積分，再計算此積分(反導函數) 在 400 的值，並減去此積分在 100 的值，即留下製造 100 到 400 個單位的總成本。因此，連續單位的總成本相當於邊際成本函數的定積分。

Cost of a Succession of Units

For a marginal cost function $MC(x)$:

$$\begin{pmatrix}\text{Total cost of}\\ \text{units } a \text{ to } b\end{pmatrix} = \int_a^b MC(x)\,dx$$

Example 7 – *FINDING THE COST OF A SUCCESSION OF UNITS*

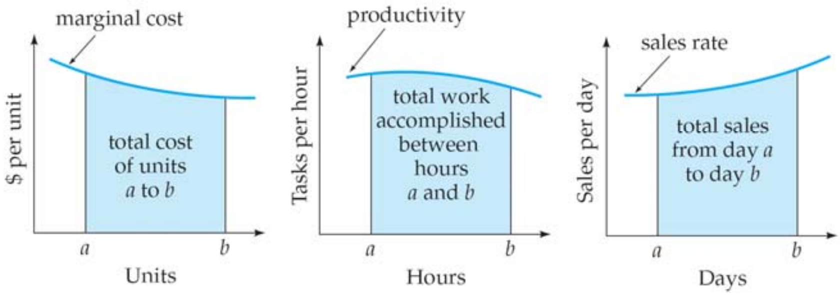
A company's marginal cost function is $MC(x) = 75/\sqrt{x}$ where x is the number of units. Find the total cost of producing units 100 to 400. [Ans: $1500]

2. 對任何的「變化率」(rate) $f(x)$ 由 a 到 b 做積分，等於加總 (*total accumulation*) 由 a 到 b 的區間範圍內 $f(x)$ 的值。

Total Accumulation at a Given Rate

$$\begin{pmatrix}\text{Total accumulation at}\\ \text{rate } f \text{ from } a \text{ to } b\end{pmatrix} = \int_a^b f(x)\,dx$$

下圖展示了這些想法。在每個 case 當中，曲線代表某種「變化率」，曲線下的面積，可由定積分求得，代表加總或累計此「變化率」。下圖中間表示人對重覆性工作的生產力，可以看到一開始是逐漸增加，接著因為單調，生產力逐漸遞減。



Example 8 – *FINDING TOTAL PRODUCTIVITY FROM A RATE*

A technician can test computer chips at the rate of $-3t^2 + 18t + 15$ chips per hour (for $0 \le t \le 6$), where t is the number of hours after 9:00 a.m. How many chips can be tested between 10:00 a.m. and 1:00 p.m.? [Ans: 117 chips can be tested.]

【Topic 4. 積分表示法】Integration Notation

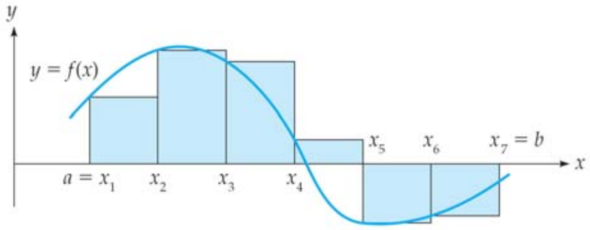
1. 符號$\sum$ (希臘字母的 S，念成 sigma) 在數學上代表總和 (*sum*)，因此黎曼和(Riemann sum) 可被寫成 $\sum_1^n f(x_k)\cdot\Delta x$. 事實上，黎曼和趨近於定積分的改寫方法如下：

$$\sum_1^n f(x_k)\cdot\Delta x \to \int_a^b f(x)\ dx \quad \text{as } n\to\infty \quad \sum \text{ becomes } \int \text{, } \Delta \text{ becomes } d$$

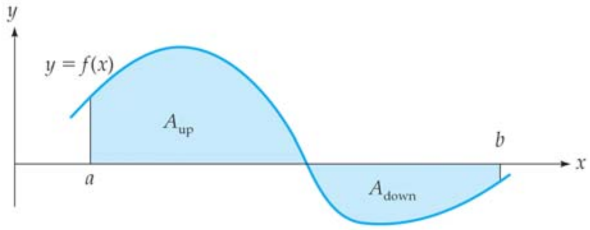
積分表示法提醒我們一個定積分代表矩形的面積總和，其中單一矩形的面積為高度 $f(x)$ 與寬度 dx 相乘。

【Topic 5. 函數的正負值】Functions Taking Positive and Negative Values

1. 黎曼和可用來計算任何連續函數，並「未限定」在「非負函數」。下列圖形顯示一個連續函數的黎曼和，面積包含正值與負值。對最右邊的兩個矩形而言，因為函數值 $f(x)$ 為負值，因此它們也會為面積總和貢獻出負值。



2. 黎曼和的極限值求定積分時，當函數在 x 軸下方，則貢獻出負的面積。因此一個函數由 a 到 b 求曲線與 x 軸之間的面積 (定積分)，將會是一個帶有正負號的面積， 其值為 x 軸之上的面積減去 x 軸之下的面積，如下圖所示。



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{up} - A_{down}$$

Section 5.4 Further application of definite integrals: average value and area between curves 定積分的進一步應用：平均值定理與兩個曲線之間所圍成的面積

本節將介紹定積分的兩個重要目的：找出「函數平均值」與「曲線之間的面積」。「平均值」被廣泛應用，如寶寶的出生體重與平均體重比較，退休福利由平均所得來決定等等。平均值能消除波動性，將「一個集合的數」以「單一具代表性的數」代替。曲線間的面積使用在尋找貿易赤字 (trade deficits) 的數量，到安全帶拯救生命 (lives saved by seat belts) 的數量等等。

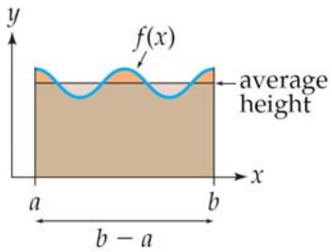
【Topic 1. 函數的平均值】Average Value of a Function

1. n 個數的平均值為所有數值加總後再除以 n。例如 a, b, c 三個數的平均值：

$$\begin{pmatrix} \text{Average of} \\ a,\ b,\ \text{and}\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

我們將如何找出一個函數在一個區間內的平均值？例如我們有一個以時間 t 為變數的溫度函數，我們要如何計算一天之內的平均溫度？當然我們可以每一個小時記錄一次溫度，然後再平均此 24 個溫度數值，但是這樣會忽略掉其它任何時刻的溫度。

2. 直觀地來看，「平均」會將曲線的鏟平 (leveling off) 成單一平均高度 (average height) 水平線，如右圖中所示。這個平均的過程會利用山丘 (hills) 上的面積來填滿山谷 (valleys) 的面積。因此原本「曲線下的面積」與鏟平後「水平線下的面積」相同，即



$$(b-a)\begin{pmatrix} \text{Average} \\ \text{height} \end{pmatrix} = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{Equating the two areas}$$

因此，我們可以得到平均高度為

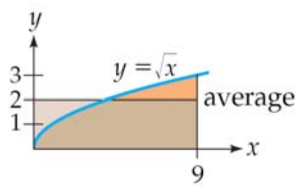
$$\begin{pmatrix} \text{Average} \\ \text{height} \end{pmatrix} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{Dividing by } (b-a)$$

面積 ÷ 寬度
= 平均高度

這個方程式讓我們可以計算連續函數在某個區間內的平均值。找出曲線底下的面積再除以 (b–a) [類比於 n 個平均數要先加總再除以 n]。

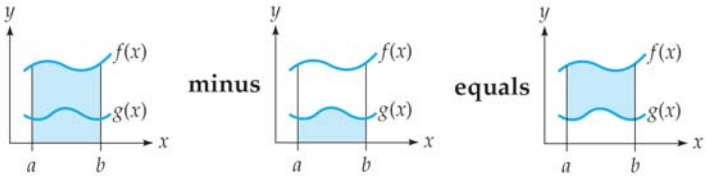
※ Example 1–*FINDING THE AVERAGE VALUE OF A FUNCTION*

Find the average value of $f(x) = \sqrt{x}$ from $x = 0$ to $x = 9$.



【Topic 2. 曲線之間的面積：上減下】Area Between Curves: Integrating "Upper Minus Lower"

1. 定積分可以計算曲線之下的面積。若要計算兩個曲線之間的面積，可以計算「上界曲線 (upper curve) 下的面積」，減去「下界曲線 (upper curve) 下的面積」即得，如下圖所示。



以積分表示如下：

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad - \quad \int_a^b g(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b [\underset{\uparrow \atop \text{Upper curve}}{f(x)} - \underset{\uparrow \atop \text{Lower curve}}{g(x)}]\,dx$$

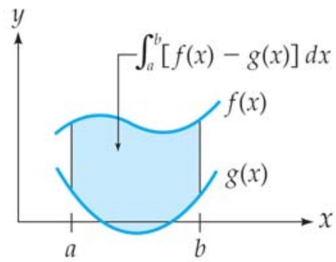
2. 因此曲線之間的面積可以寫成下列積分式：

Area Between Curves

The area between two continuous curves $f(x) \geq g(x)$ on $[a, b]$ is

$$\begin{pmatrix}\text{Area between}\\ f \text{ and } g \text{ on } [a, b]\end{pmatrix} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

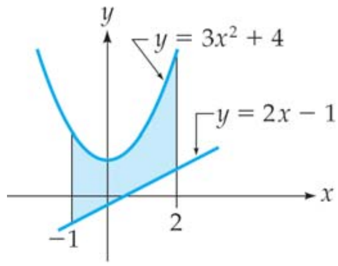
Integrate "upper minus lower"



由「上界」減「下界」的積分得到曲線之間的面積，無需去管曲線是否會下降到 x 軸之下。

※ Example 3–*FINDING THE AREA BETWEEN CURVES*

Find the area between $y = 3x^2 + 4$ and $y = 2x - 1$ from $x = -1$ to $x = 2$.



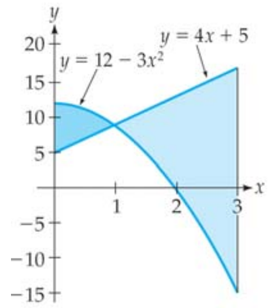
3. 如果兩條曲線代表兩個比率 (*rates*: one unit per another unit)，則曲線之間的面積代表「上界」減「下界」的總量 (*total accumulation*)。

【Topic 3. 曲線之間的面積，曲線有交點】Area Between Curves That Cross

1. 當兩曲線在某點相會時，上曲線會變成下曲線，下曲線會變成上曲線。因此要計算兩曲線之間的面積，先以「上減下」計算某一區間內的面積，再計算兩個或多個區間內的面積和。
2. 補充：(1).要計算兩個函數交點，令「兩函數相等」，然後「解方程式」即可得交點 x 值。
   (2).要決定某區間內何者為上界曲線，可代入該區間內的某數比較函數值大小即可。

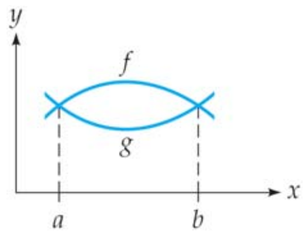
※ Example 5–*FINDING THE AREA BETWEEN CURVES THAT CROSS*

Find the area between the curves $y = 12–3x^2$ and $y = 4x+5$ from $x = 0$ to $x = 3$.



【Topic 4. 曲線所圍出來的封閉區間面積】Areas Bounded by Curves

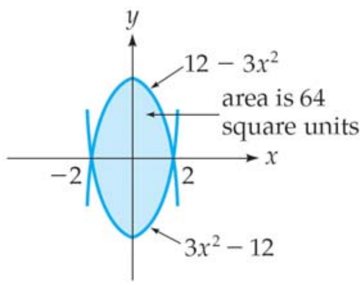
1. 有時要找出兩曲線所圍出來的面積，且沒有告知 x 值的起點與終點，這樣的問題通常曲線會圍出一個區域，其曲線的交點與上下界的決定與 Topic 3.2 所描述的兩點補充相同。



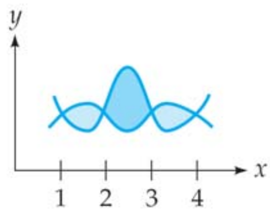
The x-values a and b are where the curves meet.

※ Example 6 – *FINDING AN AREA BOUNDED BY CURVES*

Find the area bounded by the curves $y = 3x^2–12$ and $y = 12–3x^2$.



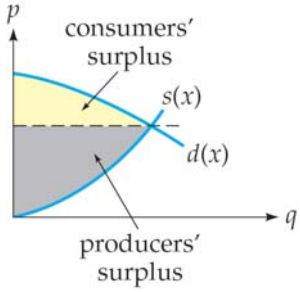
2. 上述兩拋物線 $y = 12–3x^2$ 與 $y = 3x^2–12$ 如上圖所示。請注意不需要畫出這個圖也可以計算兩函數所圍成的面積。當曲線的交點為兩個以上，則必需計算多個區間內所圍成的面積，

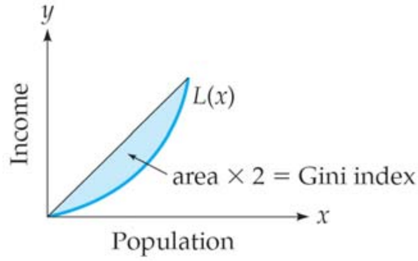


Integrate *upper minus lower* on three intervals.

Section 5.5 兩個經濟學的應用：消費者剩餘與所得分配

本節我們將討論到許多經濟學上的中要概念：消費者剩餘 (consumer’s surplus)、製造者剩餘 (producers’ surplus)、所得分配的吉尼指數 (the Gini index of income distribution) 等等。其中每一個都定義成兩條曲線之間的面積，如下圖所示。





【Topic 1. 消費者剩餘】Consumers’ Surplus

1. 想像一下你非常喜歡 pizza，並且願意付出 \$12 來買一整塊 pizza。假設實際上一個 pizza 只要花你 \$8，則你將有節省 \$4 的感覺，即你願意付出的價格減去實際上的市場價格。
2. 如果去「加總」一個時間範圍內所銷售的所有 pizzas 的「消費者願意付出價格」減去「實際市場價格」，則這個“感覺上”省下來的總數稱為「消費者剩餘」(consumer’s surplus)。
3. 消費者剩餘用來衡量消費者由經濟體下的競爭所產生的低價所獲得的好處。

【Topic 2. 需求函數】Demand Functions

1. 「價格」與「數量」呈現負相關 (inversely related): 如果一個物品的價格提高，則它的需求數量通常會降低，反之亦然。
2. 透過市場的分析研究，經濟學家能決定出「價格」與「需求量」之間的關係。這個關係可表示成一個需求函數 (demand function or demand curve) $d(x)$，稱它為需求函數是原因是該函數能表示出「恰有 x 單位的需求量所對應到的價格為多少」。

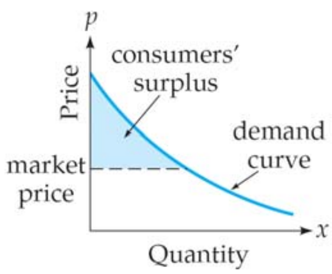
Demand Function

The demand function $d(x)$ for a product gives the price at which exactly x units will be sold.

$$d(x) = \begin{pmatrix} \text{Price when} \\ \text{demand is } x \end{pmatrix}$$

【Topic 3. 消費者剩餘的數學定義】Mathematical Definition of Consumers’ Surplus

1. 需求曲線 (demand curve) 表示消費者願意去付出的價格，市場價格 (*market price*) 表示消費者實際所付出的價格，因此需求曲線高於市場價格的這個數量代表的是「消費者利益」或「消費者剩餘」。
2. 如果我們透過積分將這些利益加總，則在需求曲線之下與價格直線之上的面積稱之為消費者在某個市場價格購買，能夠可獲得的

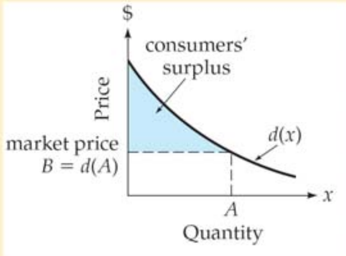


「總利益」(*total benefit*)。這個總利益如下圖水藍色陰影部份所示，稱之為消費者剩餘 (*consumers' surplus*)，如下所定義。

Consumers' Surplus

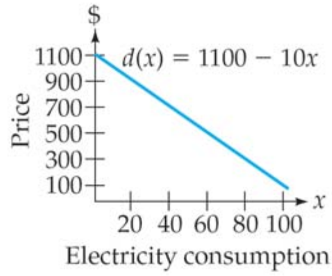
For a demand function $d(x)$ and demand level A, the market price B is the demand function evaluated at $x = A$, so that $B = d(A)$. The consumers' surplus is the area between the demand curve and the market price.

$$\begin{pmatrix}\text{Consumers'}\\ \text{surplus}\end{pmatrix} = \int_0^A [\underbrace{d(x)}_{\text{Demand function}} - \underbrace{B}_{\text{Market price}}]\, dx$$



※ Example 1 – *FINDING CONSUMERS' SURPLUS FOR ELECTRICITY*

If the demand function for electricity is $d(x) = 1100–10x$ dollars (where x is in millions of kilowatt-hours, $0 \le x \le 100$), find the consumers' surplus at the demand level $x = 80$. [Ans: 32,000]



【Topic 4. 消費者剩餘如何被使用】How Consumers' Surplus Is Used

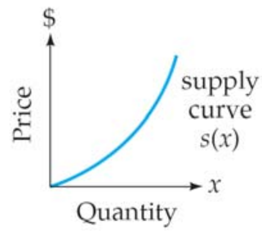
1. 在例題 1 中，在 80 百萬千瓦-小時的電力需求下，消費者剩餘為$32,000 如果電力使用增加到 90 百萬千瓦-小時，則市場價格會減成 $d(90) = 1100 – 10 \cdot 90 = \$200$。我們可以計算在這個更高需求的消費者剩餘：$40,500。因此，價格由 $300 降到 $200 代表消費者會額外利益 $40,500 – $32,000 = $8500。這個利益可與擴充一組新的發電機的花費來比較，來決定這個支出是否值得。

【Topic 5. 生產者剩餘】Producers' Surplus

1. 如同消費者剩餘是衡量消費者的總利益，生產者剩餘是用來衡量生產者在特定的市場價格銷售物品所帶來的總利益。
2. 回到我們先前 pizza 的例子，假如一個 pizza 生產者為了要維持生意運作，pizza 的(成本)價格可到達 $5，實際上一個 pizza 可以賣 $8，因此生產者可獲利 $3。將所有這樣的獲利加總起來可得到該商品的「生產者剩餘」(*producers' surplus*)。

【Topic 6. 供應函數】Supply Functions

1. 當一個商品項目的價格上揚時，生產者願意供應(或生產)的數量也會跟著提高。價格與數量的正向關係，可被表示成供應函數 (或供應曲線) $s(x)$，如下所定義：



Supply Function

The supply function $s(x)$ for a product gives the price at which exactly x units will be supplied.

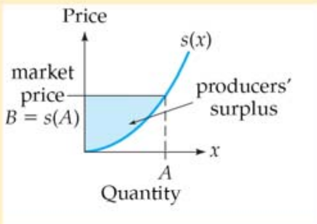
$$s(x) = \begin{pmatrix} \text{Price when} \\ \text{supply is } x \end{pmatrix}$$

【Topic 7. 生產者剩餘的數學定義】Mathematical Definition of Producers' Surplus

1. 可透過積分可求得總利益，但上界為市場價格的水平線，下界為供應曲線 $s(x)$。

Producers' Surplus

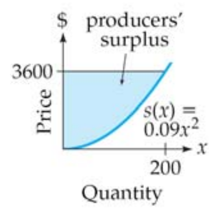
For a supply function $s(x)$ and demand level A, the market price is $B = s(A)$. The producers' surplus is the area between the market price and the supply curve.



$$\begin{pmatrix} \text{Producers'} \\ \text{surplus} \end{pmatrix} = \int_0^A [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Market} \\ \text{price}}}{B} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Supply} \\ \text{function}}}{s(x)}]\, dx$$

※ Example 2 – *FINDING CONSUMERS' SURPLUS*

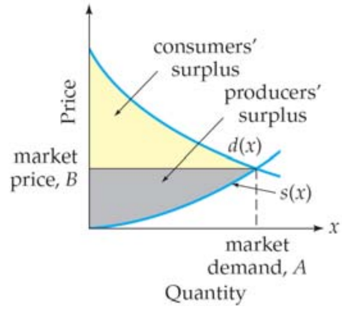
For the supply function $s(x) = 0.09x^2$ dollars and the demand level $x = 200$, find the producers' surplus.



【Topic 8. 消費者剩餘與生產者剩餘】Consumers' Surplus and Producers' Surplus

1. 需求曲線與供應曲線的交點的 x 值稱為市場需求 (market demand)。

2. 消費者剩餘與生產者剩餘可以被顯示在同一張圖裡面，如右圖所示。這兩個數值被加總表示消費者與生產者的總利益，也顯示兩者在開放市場中都能獲利。

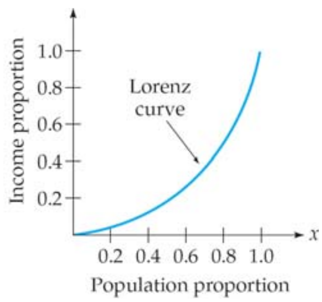


【Topic 9. 所得分佈的吉尼指數】Gini Index of Income Distribution

1. 在任何的社會中，某些人就是會賺得比其它人多。要衡量貧富之間的差距 (gap)，經濟學者計算「收入最少」的 20%人口的收入，佔總人口收入的比例，以及 40%、60%、80%、100% 以此類推。美國在 2006 年的所得分佈資訊如下表與下圖所示，

Proportion of Population	Proportion of Income
0.20	0.03
0.40	0.12
0.60	0.27
0.80	0.49
1.00	1.00

Source: U.S. Census Bureau



舉例說明，人口中收入最少 20% 只賺得總人口收入的 3%；人口中收入最少 40% 只賺得總人口收入的 12%，以此類推。這條曲線又稱為羅倫茲曲線 (*Lorenz curve*)。

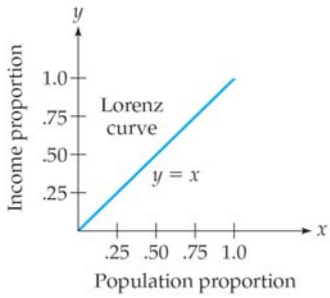
Lorenz Curve

The Lorenz curve $L(x)$ gives the proportion of total income earned by the lowest proportion x of the population.

【Topic 10. 吉尼指數】Gini Index

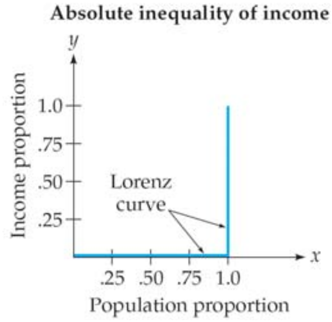
1. 羅倫茲曲線可以與下列兩個極端的收入分佈相比較：

(A). 所得分佈絕對平均 (*Absolute equality of income*) 意指每一個人的收入都完全相同，因此收入最低的 10% 人口所賺得的正好是總人口收入的 10%；收入最低的 20% 人口所賺得的正好是總人口收入的 20%，以此類推。因此羅倫茲曲線為 $y=x$，如右圖所示。



(B). 所得分佈絕對不均 (*Absolute inequality of income*) 意指除了某一個人之外，沒有其它任何一個人賺到錢。此情況羅倫茲曲線如右圖所示。

Absolute inequality of income

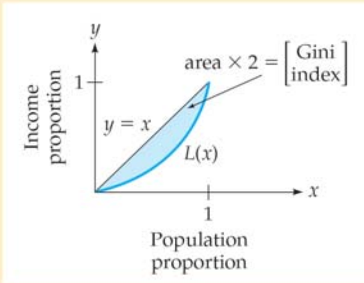


2. 要衡量「實際的所得分佈」與「理想所得分佈」 (絕對平均: *absolute equality*) 的差距，我們可以計算兩者之間所圍出的面積。實際曲線若為絕對平均 (*absolute equality*)，則面積有最小值 0；如果實際曲線若為絕對不均(*absolute inequality*)，則面積有最大值 1/2。因此經濟學者將此面積乘上 2，稱為吉尼指數 (*Gini index*)。吉尼指數範圍介於 0 ~ 1 之間，指數越小表示收入分佈越平均；指數越大表示收入分佈越不平均。

Gini Index

For a Lorenz curve $L(x)$, the Gini index is

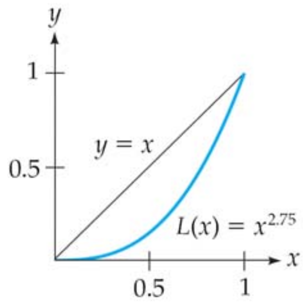
$$\begin{pmatrix}\text{Gini}\\ \text{index}\end{pmatrix} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$



The Gini index varies from 0 (absolute equality) to 1 (absolute inequality).

※ Example 3 – *FINDING THE GINI INDEX*

The Lorenz curve for income distribution in the United States in 2006 was approximately $L(x) = x^{2.75}$. Find the Gini index.



Section 5.6 代換積分 (Integration by Substitution)

【Topic 1. 微分】Differentials

1. $f(x)$ 的導函數可表示為 df/dx。雖然導函數表式成分式形式，但實際上不是兩個數量的除法。現在我們分別定義 df 與 dx (分別稱為 f 的微分與 x 的微分)，因此 $df \div dx$ 這個除法相當於 df/dx。

2. 由微分的兩種不同表示法可得：$\dfrac{df}{dx} = f'(x) \Rightarrow df = f'(x)dx$

Differential

For a differentiable function $f(x)$, the differential df is

$$df = f'(x)\,dx \qquad df \text{ is the derivative times } dx$$

※ Example 1 – *FINDING DIFFERENTIALS*

Function $f(x)$	**Differential df**
$f(x) = x^2$	$df =$ __2x dx__
$f(x) = \ln x$	$df =$ ________________
$f(x) = e^{x^2}$	$df =$ ________________
$f(x) = x^4 - 5x + 2$	$df =$ ________________

【Topic 2. 代換方法】Substitution Method

1. 使用微分表示法，我們可以列舉三個非常有用的積分公式如下：

Substitution Formulas

(A) $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C \qquad n \neq -1$

(B) $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

(C) $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}\,du = \int u^{-1}\,du = \ln|u| + C$

這三個積分公式分別為冪次規則、指數、與對數函數的積分，且非常容易記得，**其中 *du* 代表某一函數的微分**。這些公式可以對等號右邊(積分結果)微分，以驗證其正確性。

※ Example 3 – *INTEGRATING BY SUBSTITUTION*

Find $\int (x^2+1)^3 2x\ dx$ [Hint: $2x$ 為 (x^2+1) 的微分的「常數倍」]

<sol>: let $u = (x^2+1)$, $du =$__________. 將上述結果代回原積分式可得：

$\int u^3\,du =$

【Topic 3.在積分的內外乘上常數】Multiplying Inside and Outside by Constants

1. 如果積分的形式恰巧不是$\int u\,du$，我們可透過乘上常數來解這樣的積分，如例題 4。這種在積分符號內外各乘上一個互為倒數的常數，此法非常有用，也適用於其它代換積分公式。

※ Example 4 – *INSERTING CONSTANTS BEFORE SUBSTITUTING*

Find $\int (x^2+1)^3 x\ dx$ [Hint: 課本是將積分內乘 2, 積分外再乘(1/2)。]

<sol>: let $u=(x^2+1)$, $du=2xdx$ 或 $xdx=(1/2)du$. 將上述結果代回原積分式可得：

$$\int u^3\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\cdot\int u^3\,du=$$

【Topic 4. 使用何種公式】Which Formula to Use

1. 下列三種 (冪次規則、指數、對數) 積分公式應用在不同種類的積分。

(A) $\int u\,du=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C \quad (n\neq-1)$ (B) $\int e^{u}\,du=e^{u}+C$

(C) $\int\frac{du}{u}=\int u^{-1}\,du=\ln|u|+C$

※ Example 7 – *INTEGRATING BY SUBSTITUTION*

Find $\int\sqrt{x^3-3x}(x^2-1)\,dx$

【Topic 5. 代換法求定積分】Evaluating Definite Integrals by Substitution

1. 有時候定積分也需要代換。在這樣的強況下，變數由 x 變成 u，定積分的上下界也要由 x 的值變成 u 的值。

※ Example 9 – *EVALUATING A DEFINITE INTEGRAL BY SUBSTITUTION*

Evaluate $\int_4^5\frac{dx}{3-x}$.